M2 Maths Financières 2015-2016 Université Lille 1
Calcul stochastique MF.Math31 Mylene.Maida@math.univ-lille1.fr

---

Feuille 1
Propriétés du mouvement brownien et intégrale de Wiener

Dans tous les exercices ci-dessous, $(B_t)_{t\geqslant 0}$ désignera un mouvement brownien standard et $(\mathcal{F}_t)_{t\geqslant 0}$ sa filtration canonique (complétée). Pour $a \in \mathbb{R}$, on notera $T_a := \inf\{t \geq 0; B_t = a\}$.

Exercice 1. Soit $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien géométrique de paramètres μ et σ. On suppose que $S_0 = x$ est déterministe.

1. Soit $s \leq t$. Quelle est la loi de la variable aléatoire $\ln\left(\frac{S_t}{S_s}\right)$?
2. En déduire une interprétation du paramètre σ.
3. Montrer que le processus $\left(\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right)\right)_{t\geq 0}$ est à accroissements indépendants et stationnaires.
4. Calculer $\mathbb{E}(S_t)$.
5. En déduire une interprétation du paramètre μ.

Exercice 2. Dans cet exercice, on va admettre la loi du tout-ou-rien : la tribu $\mathcal{F}_{0^+} := \cap_{s>0}\mathcal{F}_s$ est triviale, au sens où si $A \in \mathcal{F}_{0^+}$ alors $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1.

1. Montrer que, p.s. pour tout $\epsilon > 0$, $\sup_{0\leq s\leq \epsilon} B_s > 0$ et $\inf_{0\leq s\leq \epsilon} B_s < 0$.
2. Montrer que, p.s. pour tout $M > 0$, $\sup_{s\geq 0} B_s > M$ et $\inf_{s\geq 0} B_s < -M$.
3. En déduire que, p.s. $\limsup_{t\to\infty} B_t = +\infty$ et $\liminf_{t\to\infty} B_t = -\infty$.
4. En déduire que, p.s. pour tout $a \in \mathbb{R}$, $T_a < \infty$.

Exercice 3. Soit $\lambda > 0$ et M^λ le processus défini par $M_t^\lambda = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$, pour tout $t \geq 0$.

1. Rappeler pourquoi M^λ est une martingale.
2. Soit $a > 0$. Justifier que $(M^\lambda_{t\wedge T_a})_{t\geq 0}$ est encore une martingale, qui est de plus bornée par $e^{\lambda a}$.
3. En déduire que pour tout $u > 0$, $\mathbb{E}(e^{-uT_a}) = e^{-a\sqrt{2u}}$.

Exercice 4. Intégrale de Wiener

On note $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$ l'ensemble des fonctions boréliennes de carré intégrable, à équivalence près. Si $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$, le but de l'exercice est de définir la variable aléatoire $I(f) := \int_0^\infty f(s)dB_s$ et d'en étudier les propriétés.

1. Si f est une fonction en escalier donnée par $f = \sum_{i=1}^n f_{i-1}\mathbf{1}_{]t_{i-1},t_i]}$, avec $0 \leq t_0 < t_1 < \ldots < t_n$, on pose $I(f) := \sum_{i=1}^n f_{i-1}(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})$.
   (a) Quelle est la loi de la variable aléatoire $I(f)$?
   (b) Montrer que l'application $I : f \mapsto I(f)$ est linéaire.
   (c) Si f et g sont deux fonctions en escalier, calculer $\mathbb{E}(I(f)I(g))$.

2. On choisit maintenant $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$. On admet qu'il existe une suite $(f_n)_{n\geq 1}$ de fonctions en escalier telle que

$$\int_0^\infty |f_n(s) - f(s)|^2 ds \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

On pose $F_n := I(f_n)$. Montrer que $(F_n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$. Elle est donc convergente. On admet que la limite ne dépend que de f et non pas de la suite approximante. On note cette limite $I(f)$.

3. Vérifier que I est linéaire et isométrique de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$ dans $\mathbb{L}^2(\Omega)$.
4. Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$, calculer $\mathbb{E}(I(f)I(g))$.
5. Quelle est la loi de la variable aléatoire $I(f)$?
6. Montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$\mathbb{E}\left(B_t I(f)\right) = \int_0^t f(s)ds.$$

Dans la suite de l'exercice, pour $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$, on note indifféremment $I(f)$ ou $\int_0^\infty f(s)dB_s$.

7. Pour $f \in \mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$ et pour tout $t \geq 0$, on pose $M_t := \int_0^t f(s)dB_s = \int_0^\infty \mathbf{1}_{[0,t]}(s)f(s)dB_s$.
   (a) Montrer que le processus $M := (M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale à trajectoires continues.
   (b) Montrer que le processus $M := (M_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien centré de fonction de covariance $(s,t) \mapsto \int_0^{t\wedge s} f^2(u)du$, à accroissements indépendants.
   (c) Montrer que le processus $(M_t^2 - \int_0^t f^2(s)ds)_{t\geq 0}$ est une martingale.
   (d) Si f et g sont deux fonctions de $\mathbb{L}^2(\mathbb{R}^+)$, calculer $\mathbb{E}(\int_0^t f(v)dB_v \int_0^s g(u)dB_u)$.
8. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ et $t \geq 0$. Montrer que

$$\int_0^t f(s)dB_s = f(t)B_t - \int_0^t f'(s)B_s ds.$$

Exercice 5. Modèle de Vasicek

Un des modèles utilisés pour étudier l'évolution des taux d'intérêt est le modèle de Vasicek. On considère le processus $r = (r_t)_{t\geq 0}$ donné de la façon suivante : pour $t \geq 0$,

$$r_t = (r_0 - b)e^{-at} + b + \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dB_u,$$

avec $r_0, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ et $\sigma > 0$.

1. Quelle est la loi de la variable aléatoire r_t ?
2. Montrer que r est un processus gaussien dont on déterminera la fonction de covariance.
3. Pour $s < t$, calculer l'espérance conditionnelle et la variance conditionnelle de r_t sachant $\mathcal{F}_s$.
4. Pour $t \geq 0$, déterminer la loi de la variable aléatoire $\int_0^t r_s ds$.
5. Pour $0 \leq t < T$, calculer enfin l'espérance conditionnelle de $e^{-\int_t^T r_s ds}$ sachant $\mathcal{F}_t$.