 Mylene.Maida@math.univ-lille1.fr

Feuille d'exercices n°1
Espaces de probabilités,
avec un peu de théorie de la mesure

Exercice 1. **(langage ensembliste)**
Trois enfants lancent chacun un ballon en direction d'un panier de basket. Il est convenu que celui qui marquera gagnera un paquet de bonbons, et en cas d'ex-aequo les vainqueurs se partageront le paquet. Si personne ne réussit son panier, chacun mangera le tiers des bonbons.

1. Quel ensemble Ω choisiriez-vous pour coder les résultats possibles de cette expérience aléatoire ?
2. En utilisant les événements : $A = \{$Arthur marque un panier$\}$,
   $B = \{$Béatrice marque un panier$\}$, $C = \{$Cécile marque un panier$\}$,
   écrire de façon ensembliste les événements suivants :
   $D = \{$tous les trois réussissent à marquer$\}$, $E = \{$aucun ne réussit à marquer$\}$,
   $F = \{$Béatrice mange tous les bonbons$\}$, $G = \{$les trois enfants mangent des bonbons$\}$,
   $H = \{$Cécile mange au moins un bonbon$\}$, $I = \{$Arthur ne reçoit aucun bonbon$\}$.
3. Ecrire les événements ci-dessus comme sous-ensembles de Ω et préciser ceux qui sont des événements élémentaires.
4. On suppose maintenant que les enfants répètent n fois l'expérience précédente dans les mêmes conditions.
   (a) Quel ensemble Ω_n choisiriez-vous pour décrire cette expérience aléatoire ?
   (b) Ecrire l'événement $J = \{$Cécile n'a pas gagné lors des deux premières parties$\}$ comme sous-ensemble de Ω_n.
   On s'intéresse désormais uniquement aux succès éventuels de Cécile. On suppose de plus que Cécile a une probabilité p de marquer à chaque partie.
   (c) Proposer un nouvel espace de probabilité.
   (d) Soit $i \in 1, ..., n$. Décrire dans cette nouvelle modélisation les éléments de l'événement, $C_i = \{$Cécile a gagné lors de la i-ème partie$\}$.
   (e) Ecrire à l'aide des événements C_i, l'événement J puis les événements $K = \{$Cécile a gagné au moins une fois lors des n premières parties$\}$.
   et $L = \{$Cécile a gagné au moins deux fois lors des n premières parties$\}$.
   (f) Calculer la probabilité de chacun des événements J, K et L.

Exercice 2. Une urne contient 32 boules numérotées de 1 à 8 (chaque numéro apparaissant 4 fois). On tire au hasard, sans remise, un échantillon de 5 boules.

1. Proposer un espace de probabilité associé à l'expérience.
2. Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :
   $E_1 = \{$Il y a exactement 4 boules avec le même numéro$\}$,
   $E_2 = \{$On obtient exactement 2 numéros, l'un porté par 3 boules et l'autre par 2$\}$,
   $E_3 = \{$Il y a exactement 4 numéros différents$\}$.

Exercice 3. **(nombre de dérangements)** Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, on note A_k l'ensemble des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ dont k est un point fixe.

1. Quel est le cardinal de A_k ?
2. Soient $i_1, \ldots, i_p$ p éléments distincts de $\{1, \ldots, n\}$. Quel est le cardinal de $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_p}$?
3. On appelle D_n le nombre de dérangements de $\{1, \ldots, n\}$, c'est-à-dire de permutations sans point fixe. Justifier que
$$D_n = n! - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} (n-k)!$$
On pourra utiliser la formule de Poincaré.
4. En déduire que la limite de $\frac{D_n}{n!}$ quand n tend vers l'infini est $\frac{1}{e}$.

Exercice 4. **(paradoxe des cordes de Bertrand)**
On se donne un cercle de centre O et de rayon 1. On considère le triangle équilatéral inscrit dans ce cercle. Quelle est la longueur de son côté ?
On choisit au hasard une corde de ce cercle, de l'une des trois manières suivantes :

a. On choisit au hasard un rayon du cercle puis on choisit uniformément un point M sur ce rayon. La corde considérée est la perpendiculaire au rayon en M.

b. On choisit un point uniformément dans le disque et on considère la corde dont ce point est le milieu.

c. On fixe un point A sur le cercle puis on choisit un point B uniformément sur le cercle. La corde considérée est le segment $[AB]$.

Déterminez dans chacune des situations la probabilité que la corde choisie soit plus longue que le côté du triangle. Ce phénomène est connu sous le nom de paradoxe de Bertrand. Est-ce un paradoxe ?

Historiquement, ce genre de problème a motivé l'introduction d'une théorie rigoureuse du hasard. En effet si on pose la question sous la forme "On se donne un cercle et on choisit au hasard une corde. Quelle la probabilité que la corde choisie soit plus longue que le côté du triangle équilatéral inscrit ?", on trouvera des réponses différentes selon le modèle choisi.

Exercice 5. Chacune des assertions suivantes est-elle vraie ou fausse ? Le montrer.

1. Une intersection quelconque d'algèbres est une algèbre. Une intersection quelconque de tribus est une tribu. Une intersection quelconque de classes monotones est une classe monotone. On peut donc définir la notion d'algèbre (respectivement tribu, classe monotone) engendrée.
2. L'union de deux tribus est une algèbre.
3. Une tribu est une classe monotone.
4. Une classe monotone stable par intersection finie est une tribu.

Exercice 6. **(théorème de la classe monotone)**
On se propose dans cet exercice de montrer le résultat suivant : Soit $\mathcal{E}$ une famille de parties de Ω, stable par intersection finie. Alors la classe monotone engendrée par $\mathcal{E}$, notée $\mathcal{M}(\mathcal{E})$, coïncide avec la tribu engendrée par $\mathcal{E}$, notée $\sigma(\mathcal{E})$.

1. Montrer que $\mathcal{M}(\mathcal{E}) \subset \sigma(\mathcal{E})$.
2. En utilisant l'exercice précédent, montrer que si $\mathcal{M}(\mathcal{E})$ est stable par intersection finie alors $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{M}(\mathcal{E})$.
3. Soit $\mathcal{M}_1 := \{A \in \mathcal{M}(\mathcal{E}) : \forall B \in \mathcal{E}, A \cap B \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\}$. Vérifier que $\mathcal{M}_1$ est une classe monotone qui contient $\mathcal{E}$.
4. Soit $\mathcal{M}_2 := \{B \in \mathcal{M}(\mathcal{E}) : \forall C \in \mathcal{M}(\mathcal{E}), B \cap C \in \mathcal{M}(\mathcal{E})\}$. Montrer que $\mathcal{M}_2$ est une classe monotone qui contient $\mathcal{E}$ et conclure.