Licence 2e année, mention Mathématiques — 2017-2018

M43, Probabilités discrètes

Examen de seconde session

22 juin 2018

[durée : 3 heures]

⚠ *Vous êtes autorisés à garder une feuille A4 manuscrite recto-verso. Tout autre document est interdit. Les calculatrices sont interdites. Le sujet comporte 3 pages et 5 exercices.*

Exercice 1 (Question de cours)

Soient X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer son espérance $E(X)$ en justifiant très soigneusement vos calculs.

Exercice 2 Dans chacune des questions ci-dessous, on demande de déterminer la loi de la variable aléatoire proposée. On précisera à chaque fois les valeurs prises par la variable aléatoire puis on donnera une expression complète de sa loi (même s'il s'agit d'une loi usuelle).

a) Une urne contient 10 jetons numérotés de 1 à 10. On tire simultanément deux jetons dans l'urne. On note X le minimum des deux nombres obtenus.

b) On lance autant de fois que nécessaire un dé équilibré. On note Y le nombre de lancers nécessaires pour obtenir le nombre 6 pour la deuxième fois.

c) Monsieur Zzz possède 10 chemises dont trois bleues. Il prend 5 chemises pour les mettre dans sa valise. On note Z le nombre de chemises bleues qu'il a dans sa valise.

d) Une urne contient $n-1$ boules blanches et une boule rouge. On tire une à une sans remise les boules jusqu'à obtenir la boule rouge. On note T le nombre de tirages effectués.

e) Soit U_1 et U_2 deux urnes identiques contenant chacune $2n$ jetons numérotés de 1 à $2n$. On tire simultanément sans remise n jetons dans l'urne U_1 et n jetons dans l'urne U_2. On note W le nombre de numéros communs aux deux prélèvements.

Exercice 3 Une urne contient 7 boules : 2 bleues, 3 jaunes et 2 rouges. On en choisit 3 au hasard (sans remise).

a) Donner un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ permettant de modéliser cette expérience aléatoire.

On note respectivement B, J et R la variable aléatoire correspondant au nombre de boules bleues (resp. jaunes, resp. rouges) parmi les trois boules choisies.

b) Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules rouges ?

c) Quelle est la loi de la variable aléatoire R ?

d) Déterminer la loi du vecteur aléatoire (B, J). *On pourra donner le résultat sous forme d'un tableau.*

e) Calculer la probabilité $P(B > J)$ qu'il y ait plus de boules bleues que de boules jaunes.

f) Calculer la covariance $\mathrm{cov}(B, J)$ de B et J.

g) Calculer de deux façons différentes $\mathrm{V}(B + J)$ la variance de la variable aléatoire $B + J$.

Exercice 4 On lance n fois un dé à 6 faces équilibré. Si on obtient au moins une fois le chiffre 6 au cours des n lancers, on ne gagne rien. Si au bout des n lancers, on n'a jamais obtenu le chiffre 6, on gagne la somme des n chiffres obtenus. Le but de l'exercice est de calculer l'espérance du gain total X_n en fonction de n et de déterminer pour quelle(s) valeur(s) de n cette espérance est maximale.

a) On suppose dans cette question que $n = 1$. Déterminer dans ce cas la loi de X_1 puis son espérance.

b) On prend maintenant $n \geqslant 1$. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois le chiffre 6 au cours des n lancers ?

c) Pour i entier entre 1 et n, on note Y_i la variable aléatoire qui vaut 0 si on a obtenu au moins une fois le chiffre 6 au cours des n lancers et qui vaut le chiffre obtenu au $i$ème lancer si on n'a jamais obtenu le chiffre 6 au cours des n lancers. Déterminer la loi de Y_i.

d) Les variables $(Y_1, \ldots, Y_n)$ sont-elles indépendantes ?

e) Pour i entier entre 1 et n, calculer l'espérance de Y_i.

f) Exprimer X_n en fonction des variables Y_i.

g) Calculer l'espérance de X_n (on ne cherchera pas à determiner sa loi).

h) Pour quelle(s) valeurs(s) de n ce jeu est-il le plus favorable au joueur ? (on pourra utiliser que $-\frac{1}{\ln(5/6)} \simeq 5,48$).

Exercice 5 Pour rester en forme, une personne décide de faire une séance de jogging tous les jours. On admet que si elle court un jour, alors la probabilité qu'elle coure le lendemain vaut $0,6$, tandis que si elle ne court pas un jour, la probabilité qu'elle ne coure pas le lendemain vaut $0,2$. On note p_1 la probabilité qu'elle coure le premier jour suivant cette bonne résolution. On cherche à calculer en fonction de p_1 et de n la probabilité p_n de l'événement

$$A_n = \{\text{La personne court le jour } n\}.$$

a) Donner les valeurs des probabilités conditionnelles $P_{A_{n-1}}(A_n)$ et $P_{\overline{A_{n-1}}}(A_n)$.

b) En appliquant la formule des probabilités totales, en déduire que la suite $(p_n)_{n\geqslant 1}$ vérifie la relation de récurrence :

$$p_n = -0,2p_{n-1} + 0,8 \qquad (n \geqslant 2). \tag{1}$$

c) Pour résoudre la relation de récurrence (1), on cherche une constante a telle que la nouvelle suite $q_n = p_n + a$ soit une suite géométrique. Quelle valeur de a convient ? Exprimer alors q_n en fonction de q_1 et de n.

d) En déduire la valeur de p_n en fonction de p_1 et de n. Montrer que p_n converge quand n tend vers l'infini vers une limite p qui ne dépend pas de p_1.