Examen

22 mai 2018

[durée : 3 heures]

Vous êtes autorisés à garder une feuille A4 manuscrite recto-verso. Tout autre document est interdit. Les calculatrices sont interdites. Le sujet comporte 4 pages et 5 exercices.

Exercice 1 (Question de cours)

Soient G_1 et G_2 deux variables aléatoires indépendantes, de loi géométrique de paramètres respectifs p_1 et p_2. Montrer que la variable aléatoire $M := \min(G_1, G_2)$ suit encore une loi géométrique dont on précisera le paramètre.

Exercice 2 (Reconnaître des lois usuelles)

Dans cet exercice, on demande de reconnaître des lois usuelles, en précisant bien les paramètres, et d'appliquer les formules du cours pour déterminer l'espérance. On ne demande pas de justification ni de calcul détaillé.

a) Lors d'une séance de penaltys, 5 joueurs tirent successivement leur penalty. On suppose que les tirs sont indépendants et qu'à chaque tir, le joueur a une probabilité $2/3$ de marquer.

(i) Quelle est la probabilité qu'aucun des cinq joueurs ne marque ?

(ii) Quelle est la loi du nombre de buts marqués ?

(iii) Quelle est l'espérance du nombre de buts marqués ?

b) Dans une promotion de 100 étudiants dont 40 femmes, on veut constituer une équipe de basket pour une compétition amicale avec l'université voisine. On choisit 5 personnes au hasard pour former cette équipe.

(i) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune femme dans l'équipe ?

(ii) Peut-on approcher cette quantité par une quantité plus facile à calculer ?

(iii) Quelle est la loi du nombre de femmes dans l'équipe ?

(iv) En moyenne, combien l'équipe contiendra-t-elle de femmes ?

Exercice 3 Dans un pays étrange sévit une maladie mystérieuse appelée toxoprobamathose. Après étude, on obtient les résultats suivants : la probabilité pour un habitant de ce pays d'être atteint de la maladie est de 0,001. Parmi les individus atteints et non traités, la toxoprobamathose est mortelle avec une probabilité de 50%. Parmi les individus atteints, dépistés et traités, la toxoprobamathose est mortelle avec une probabilité de 5%. Le seul test de dépistage disponible permet de détecter 80 % des personnes atteintes par cette maladie, mais désigne à tort comme malades 3 % des personnes non atteintes. De plus le traitement est mortel pour 2 % des personnes qui ont été traitées à tort. Les autorités du pays ont alors le choix entre les deux stratégies suivantes :

- ◇ on ne procède à aucun dépistage ni à aucun traitement,
- ◇ on décide un dépistage systématique et un traitement des personnes pour lequel le test est positif.

a) Si l'option de ne faire aucun dépistage ni aucun traitement est choisie, quel est le taux de mortalité lié à la maladie (c'est-à-dire la proportion d'habitants qui vont mourir de la maladie) ?

b) Si la seconde option est choisie, quelle est la proportion d'individus qui vont mourir (de la maladie ou de son traitement) ?

c) Vous êtes ministre de la santé de ce pays. Que décidez-vous ?

Exercice 4 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $S := X + Y$ et $T := X - Y$.

a) Déterminer la loi du couple (S,T).

b) En déduire la loi de S et la loi de T.

c) Calculer la covariance $cov(S,T)$ du couple (S,T).

d) Les variables S et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 5 Soit N un entier strictement positif et r un entier entre 1 et N. On considère une urne contenant au total N boules numérotées de 1 à N ; les boules portant les numéros de 1 à r sont rouges et les autres sont blanches. On pioche une à une sans remise les boules dans l'urne jusqu'à avoir récolté toutes les boules rouges. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de tirages effectués. *On ne demande pas de préciser l'espace de probabilité considéré.*

a) On suppose dans cette question que $r = N$.

(i) Montrer que X ne prend dans ce cas qu'une seule valeur possible, que l'on précisera.

(ii) En déduire l'espérance et la variance de X.

b) On suppose dans cette question que $r = 1$.

(i) Quelle est la loi de X ? *On pourra reconnaître une loi usuelle.*

(ii) Calculer l'espérance et la variance de X.

c) On suppose dans cette question que $N = 4$ et $r = 2$.

(i) Déterminer la loi de X.

(ii) Calculer l'espérance et la variance de X.

d) On s'intéresse maintenant au cas général. On rappelle que N est un entier strictement positif et r un entier entre 1 et N.

(i) Quelles sont les valeurs possibles de X ?

(ii) Soit k un entier entre r et N. Déterminer la probabilité qu'au cours des $k-1$ premiers tirages, on ait tiré exactement $r-1$ boules rouges.

(iii) Soit k un entier entre r et N. Déduire de la question précédente que

$$P(X = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}.$$

(iv) En déduire la valeur de la somme

$$s_1 := \sum_{k=r}^{N} \binom{k-1}{r-1}.$$

(v) En déduire ensuite les valeurs respectives des sommes

$$s_2 := \sum_{k=r}^{N} \binom{k}{r} \text{ et } s_3 := \sum_{k=r}^{N} \binom{k+1}{r+1}.$$

(vi) Montrer que $E(X) = \frac{r(N+1)}{r+1}$.

(vii) Calculer $E(X(X+1))$ puis en déduire la variance de X.