LICENCE 2E ANNÉE, MENTION MATHÉMATIQUES 2018-2019

M43, PROBABILITÉS DISCRÈTES

# FICHE 5 : MOMENTS DE VARIABLES ALÉATOIRES DISCRÈTES

## Exercice 1

On lance un dé équilibré. On désigne par $X$ le nombre obtenu avec ce dé.

**a)** Déterminer l'espérance $\mathrm{E}(X)$ et la variance $\mathrm{V}(X)$ de $X$.

**b)** Calculer l'espérance et la variance de la somme obtenue en lançant trois dés. Comparer aux valeurs de l'espérance et de la variance de trois fois la valeur d'un dé.

## Exercice 2

Alice et Bob jouent aux dés. La partie est déjà bien engagée, et à ce stade, c'est à Alice de lancer les deux dés. Si au moins un des dés donne cinq, elle gagne, et Bob doit lui donner 11€. Si elle n'obtient pas de cinq, elle perd, et elle doit alors 11€ à son adversaire. Bob propose : « tu ne lances pas les dés, tu me donnes directement 4€ et nous sommes quittes. »
On veut déterminer si Alice a intérêt à accepter ce marché.

**a)** On note $X$ la somme (positive ou négative) que va gagner Bob. Quelle est la loi de $X$ ?

**b)** Calculer son espérance $\mathrm{E}(X)$. Comparer ce gain moyen avec la somme de 4 euros que Bob réclame et conclure.

## Exercice 3

Soit $X$ une variable aléatoire discrète suivant une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Justifier que l'espérance de la variable aléatoire discrète $Y = e^X$ existe et la calculer. On dit que $X$ admet un moment exponentiel.

## Exercice 4

Soit $X$ une variable aléatoire telle que $\mathrm{E}(X) = 1$ et $\mathrm{V}(X) = 5$. Trouver

**a)** l'espérance $\mathrm{E}\left((2+X)^2\right)$ ;

**b)** la variance $\mathrm{V}(4-3X)$.

## Exercice 5

Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes de loi de Bernoulli de paramètre $1/2$. On définit les variables aléatoires $S = X + Y$ et $D = |X - Y|$.

**a)** Donner les lois de $S$ et $D$.

**b)** Calculer $\text{Cov}(S, D)$. Les variables aléatoires $S$ et $D$ sont-elles indépendantes ?

## Exercice 6

**a)** Soit $Z$ une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ admettant une espérance, notée $E(Z)$. Montrez que

$$E(Z) = \sum_{j=1}^{\infty} P(Z \geqslant j).$$

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Deux joueurs utilisent un dé à $n$ faces (numérotées $1, 2, \ldots, n$) de la manière suivante :

— le joueur A lance le dé, obtient le résultat $X$, et verse 3 euros au joueur B ;

— le joueur B lance alors le dé jusqu'à ce qu'il obtienne une valeur supérieure ou égale à X (la partie s'arrête alors) ; à chaque lancer, il donne 1 euro au joueur A.

On note $M$ la somme versée au cours de la partie par le joueur B au joueur A.

**b)** Quelle est la loi de $X$ ?

**c)** Calculer $P_{\{X=1\}}(M = 1)$, puis $P_{\{X=1\}}(M = j)$, pour $j \geqslant 2$.

**d)** Pour tous $k \geqslant 2$ et $j \geqslant 1$, calculer $P_{\{X=k\}}(M \geqslant j)$ puis $P_{\{X=k\}}(M = j)$ en fonction de $n, k$ et $j$.

**e)** Déduire des questions précédentes que, pour $j \geqslant 2$

$$P(M \geqslant j) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left( \frac{k-1}{n} \right)^{j-1}.$$

**f)** Montrer que la variable $M$ admet une espérance, qui peut s'écrire

$$E(M) = \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n-(k-1)}.$$

**g)** Quelle est la limite de $E(M)$ quand $n$ tend vers l'infini ?

**h)** Donner un équivalent de $E(M)$ quand $n$ tend vers l'infini.

**i)** On dit que le jeu est favorable au joueur $A$ si l'espérance de son gain est positive ou nulle, défavorable sinon. Montrer qu'il existe un entier $n_0$ tel que, si $n \leqslant n_0$, le jeu est défavorable au joueur $A$ tandis que si $n > n_0$, le jeu lui est favorable.

## Exercice 7

On considère une suite de $n$ épreuves répétées indépendantes, chaque épreuve ayant $k$ résultats possibles $r_1, \ldots, r_k$. On note $p_i$ la probabilité de réalisation du résultat $r_i$ lors d'une épreuve donnée. Pour $1 \leqslant i \leqslant k$, notons $X_i$ le nombre de réalisations du résultat $r_i$ au cours des $n$ épreuves.

**a)** Expliquer sans calcul pourquoi $\mathrm{V}(X_1 + \cdots + X_k) = 0$.

**b)** Quelle est la loi de $X_i$ ? Que vaut sa variance ?

**c)** Pour $i \neq j$, donner la loi et la variance de $X_i + X_j$.

**d)** En déduire $\mathrm{Cov}(X_i, X_j)$.

**e)** Contrôler ce résultat en développant $\mathrm{V}(X_1 + \cdots + X_k)$ et en utilisant la première question.