Fiche 3 : Variables aléatoires discrètes

Exercice 1

Déterminer la loi des variables aléatoire X, V et Y

a) Monsieur Zzzz possède 50 cravates, dont une seule est à rayures. Tous les matins, il prend une cravate au hasard dans l'armoire, et tous les soirs il remet la cravate du jour à sa place. On observe Monsieur Zzzz pendant 20 jours et on appelle X le nombre de fois où il porte une cravate à rayures.
Application numérique : Calculer $P(X = 1)$.

b) Monsieur Zzzz part en voyage. Il met dans sa valise 20 cravates prises au hasard dans l'armoire. On appelle V le nombre de cravates à rayures contenues dans la valise ?
Application numérique : Calculer $P(V = 1)$.

c) Monsieur Zzzz possède aussi 10 chemises dont 3 sont bleues. Il prend 5 chemises au hasard et les met dans sa valise. On appelle Y le nombre de chemises bleues contenues dans la valise ?
Application numérique : Calculer $P(Y = 1)$.

Exercice 2

Une urne contient N jetons numérotés de 1 à N. On en tire $n \leqslant N$ au hasard et sans remise. Soit $k \in \{1, \dots, N\}$.

a) Décrire un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ associé à l'expérience aléatoire.

b) Quelle est la probabilité que les jetons tirés aient tous des numéros inférieurs ou égaux à k ?

c) On désigne par X la variable égale au plus grand numéro des jetons tirés. Déterminer la loi de X.

d) Mêmes questions avec un tirage avec remise.

Exercice 3 Dans un lot de 100 composants électroniques, il y a deux composants défectueux. On prélève au hasard sans remise n composants dans ce lot et on note X le nombre de composants défectueux parmi les n prélevés.

a) Quelle est la loi de X si $n = 100$?

b) Je choisis un composant au hasard. Quelle est la probabilité qu'il soit défectueux ? En déduire la loi de X si $n = 1$.

c) En déduire aussi la loi de X si $n = 99$.

d) On suppose que $2 \leqslant n \leqslant 98$. Donner la loi de X.

e) Exprimer le plus simplement possible $P(X = 2)$ lorsque $2 \leqslant n \leqslant 98$.

Exercice 4

On lance ensemble 5 dés. On met de coté ceux qui ont donné l'as, puis on relance les autres, et ainsi de suite jusqu'à ce que tous les dés aient amené l'as. Le jeu s'arrête au bout de X lancers.

a) Donner un espace de probabilité permettant de coder cette expérience aléatoire.

b) Les dés sont numérotés de 1 à 5. Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et i allant de 1 à 5, on note E_{ik} l'événement "le dé numéro i a amené un as au plus tard lors du $k$ième lancer". Quelle est la probabilité de E_{ik} ?

c) Exprimer l'événement $\{X \leqslant k\}$ en fonction des E_{ik}.

d) Déterminer la loi de la variable X.

Exercice 5

Soit X une v.a. de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On définit la v.a. Y de la manière suivante :

a) si X prend une valeur nulle ou impaire alors Y prend la valeur 0,

b) si X prend une valeur paire alors Y prend la valeur $X/2$.

Trouver la loi de Y.

Exercice 6

Soit N un entier strictement positif et r un entier entre 1 et N. On considère une urne contenant au total N boules numérotées de 1 à N ; les boules portant les numéros de 1 à r sont rouges et les autres sont blanches. On pioche une à une sans remise les boules dans l'urne jusqu'à avoir récolté toutes les boules rouges. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de tirages effectués. *On ne demande pas de préciser l'espace de probabilité considéré.*

a) On suppose dans cette question que $r = N$.

(i) Montrer que X ne prend dans ce cas qu'une seule valeur possible, que l'on précisera.

(ii) En déduire l'espérance et la variance de X.

b) On suppose dans cette question que $r = 1$.

(i) Quelle est la loi de X ? *On pourra reconnaître une loi usuelle.*

(ii) Calculer l'espérance et la variance de X.

c) On suppose dans cette question que $N = 4$ et $r = 2$.

(i) Déterminer la loi de X.

(ii) Calculer l'espérance et la variance de X.

d) On s'intéresse maintenant au cas général. On rappelle que N est un entier strictement positif et r un entier entre 1 et N.

(i) Quelles sont les valeurs possibles de X ?

(ii) Soit k un entier entre r et N. Déterminer la probabilité qu'au cours des $k-1$ premiers tirages, on ait tiré exactement $r-1$ boules rouges.

(iii) Soit k un entier entre r et N. Déduire de la question précédente que

$$P(X = k) = \frac{\binom{k-1}{r-1}}{\binom{N}{r}}.$$

(iv) En déduire la valeur de la somme

$$s_1 := \sum_{k=r}^{N} \binom{k-1}{r-1}.$$

Exercice 7 (S'entraîner encore à reconnaître des lois usuelles)

Dans cet exercice, on demande de reconnaître des lois usuelles, en précisant bien les paramètres.

a) Lors d'une séance de penaltys, 5 joueurs tirent successivement leur penalty. On suppose que les tirs sont indépendants et qu'à chaque tir, le joueur a une probabilité $2/3$ de marquer.

(i) Quelle est la probabilité qu'aucun des cinq joueurs ne marque ?

(ii) Quelle est la loi du nombre de buts marqués ?

b) Dans une promotion de 100 étudiants dont 40 femmes, on veut constituer une équipe de basket pour une compétition amicale avec l'université voisine. On choisit 5 personnes au hasard pour former cette équipe.

(i) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune femme dans l'équipe ?

(ii) Peut-on approcher cette quantité par une quantité plus facile à calculer ?

(iii) Quelle est la loi du nombre de femmes dans l'équipe ?