Licence 2^e année, mention Mathématiques 2018-2019

M43, Probabilités discrètes

Fiche 2 : Probabilités conditionnelles et indépendance

Exercice 1

Une urne contient 10 jetons jaunes, 5 blancs et 1 rouge. J'ai tiré un jeton de cette urne et je vous annonce qu'il n'est pas rouge. Quelle est la probabilité qu'il soit jaune ?

Exercice 2

Un joueur de tennis a une probabilité de 40% de passer sa première balle de service. S'il échoue, sa probabilité de passer sa deuxième balle est 70%. Lorsque sa première balle de service passe, sa probabilité de gagner le point est 80%, tandis que sa probabilité de gagner le point lorsqu'il passe sa deuxième balle de service n'est plus que 50%.

a) Calculer la probabilité qu'il passe sa deuxième balle et celle qu'il fasse une double faute.

b) Calculer la probabilité qu'il perde le point sur son service.

c) Sachant qu'il a perdu le point, quelle est la probabilité que ce soit sur une double faute ?

Exercice 3

On s'intéresse à la fiabilité d'un alcootest pour automobilistes. Grâce à des études statistiques sur un grand nombre d'automobilistes, on sait que 5% d'entre eux dépassent la dose d'alcool autorisée. Aucun test n'est fiable a 100%. Pour celui que l'on considère, la probabilité que le test soit positif quand la dose d'alcool autorisée est dépassée est $0,95$. La probabilité que le test soit négatif quand elle ne l'est pas, vaut aussi $0,95$.

On notera A l'événement « l'automobiliste testé a réellement dépassé la dose d'alcool autorisée »et T l'événement « le test est positif ».

a) Donner sans calcul la valeur des probabilités suivantes : $P(A)$, $P_A(T)$ et $P_{\overline{A}}(\overline{T})$.

b) Quelle est la probabilité que le test soit positif ?

c) Quelle est la probabilité qu'un automobiliste ayant un test positif ait réellement dépassé la dose d'alcool autorisée ?

d) Un policier affirme : ce test est beaucoup plus fiable le samedi soir à la sortie des boites de nuit ! La proportion d'automobilistes ayant trop bu est alors de 50%. En reprenant les deux questions précédentes dans ce cas, déterminer s'il a raison.

Exercice 4

On lance deux dés et on considère les événements :

$$\begin{aligned} A &= \{\text{le résultat du premier dé est impair}\}, \\ B &= \{\text{le résultat du second dé est pair}\}, \\ C &= \{\text{les résultats des deux dés sont de même parité}\}. \end{aligned}$$

Etudier l'indépendance deux à deux des événements A, B et C, puis l'indépendance mutuelle (indépendance de la famille) A, B, C.

Exercice 5

On s'intéresse à la répartition des sexes des enfants d'une famille de n enfants. On prend comme modélisation

$$\Omega_n = \{\mathtt{f}, \mathtt{g}\}^n = \{\, (x_1, \dots, x_n),\ x_i \in \{\mathtt{f}, \mathtt{g}\}, i = 1, \dots, n\},$$

muni de l'équiprobabilité. On considère les événements :

$$A = \{\text{la famille a des enfants des deux sexes}\} \quad B = \{\text{la famille a au plus une fille}\}.$$

a) Montrer que pour $n \geqslant 2$, $P(A) = (2^n - 2)/2^n$ et $P(B) = (n+1)/2^n$.

b) En déduire que A et B ne sont indépendants que si $n = 3$.

Exercice 6

On effectue des lancers répétés d'une paire de dés discernables et on observe pour chaque lancer la *somme* des points indiqués par les deux dés. On se propose de calculer de deux façons la probabilité de l'événement E défini ainsi : *dans la suite des résultats observés, la première obtention d'un* 9 *a lieu avant la première obtention d'un* 7.

a) Quelle est la probabilité de n'obtenir ni 7 ni 9 au cours d'un lancer ?

b) *Première méthode :* On note $F_i = \{\textit{obtention d'un } 9 \textit{ au i-ième lancer}\}$ et pour $n > 1$, $E_n = \{\textit{ni } 7 \textit{ ni } 9 \textit{ ne sont obtenus au cours des } n-1 \textit{ premiers lancers et le n-ième lancer donne } 9\}$. Dans le cas particulier $n = 1$, on pose $E_1 = F_1$.

(i) Exprimer E à l'aide d'opérations ensemblistes sur les E_n ($n \geqslant 1$). Exprimer de même chaque E_n à l'aide des F_i et des $H_i = \{\textit{ni } 7 \textit{ ni } 9 \textit{ au i-ième lancer}\}$.

(ii) Calculer $P(E_n)$ en utilisant l'indépendance des lancers.

(iii) Calculer $P(E)$.

c) *Deuxième méthode :* On note $G_1 = \{\textit{obtention d'un } 7 \textit{ au premier lancer}\}$.

(i) Donner une expression de $P(E)$ en utilisant le conditionnement par la partition $\{F_1, G_1, H_1\}$.

(ii) Donner sans calcul les valeurs de $P_{F_1}(E)$, $P_{G_1}(E)$ et expliquer pourquoi $P_{H_1}(E) = P(E)$.

(iii) En déduire la valeur de $P(E)$.

Exercice 7 On considère une urne contenant au départ une boule verte et une rouge. On effectue une suite de tirages d'une boule selon la procédure suivante. Chaque fois que l'on tire une boule verte, on la remet dans l'urne *en y rajoutant une boule rouge*. Si l'on tire une boule rouge, on arrête les tirages. *On ne demande pas ici de spécifier l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *utilisé.*

On notera V_i l'événement {obtenir une boule verte au i-ième tirage}.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement {le jeu s'arrête au bout de n tirages exactement} à l'aide des événements $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

b) Que vaut $\mathbb{P}_{V_1 \cap \ldots \cap V_{n-1}}(V_n)$ pour $n \geqslant 2$?

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité que le jeu s'arrête au bout de n tirages exactement.

On change maintenant la règle du jeu. Chaque fois que l'on tire une boule verte, on remet cette boule verte dans l'urne *en y rajoutant une boule rouge avec probabilité p et une boule verte avec probabilité $1-p$.* Là encore, le jeu s'arrête dès qu'on tire une boule rouge.

d) Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête au troisième coup exactement ? *On pourra s'aider dans cette question d'un arbre de probabilité.*