Licence 2e année, mention Mathématiques — 2018-2019

M43, Probabilités discrètes

Fiche 1 : Espaces probabilisés

Exercice 1

Trois enfants lancent chacun un ballon en direction d'un panier de basket. Il est convenu que celui qui marquera gagnera un paquet de bonbons, et qu'en cas d'ex-æquo les vainqueurs se partageront le paquet. Si personne ne réussit son panier, chacun mangera le tiers des bonbons. En utilisant les événements :

$$\begin{aligned} A &= \{\text{Arthur marque un panier}\}, \\ B &= \{\text{Béatrice marque un panier}\}, \\ C &= \{\text{Cécile marque un panier}\}, \end{aligned}$$

écrire de façon ensembliste les événements suivants :

$$\begin{aligned} D &= \{\text{tous les trois réussissent à marquer}\}, \\ E &= \{\text{aucun ne réussit à marquer}\}, \\ F &= \{\text{Béatrice mange tous les bonbons}\}, \\ G &= \{\text{les trois enfants mangent des bonbons}\}, \\ H &= \{\text{Cécile mange au moins un bonbon}\}, \\ I &= \{\text{Arthur ne reçoit aucun bonbon}\}. \end{aligned}$$

Préciser un univers Ω permettant de décrire cette expérience. Parmi tous ces événements, lesquels sont des événements élémentaires ?

Exercice 2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire à pile ou face n fois.

a) Donner une représentation de l'espace Ω des événements élémentaires de cette expérience.

b) Écrire l'événement F ={pile n'a pas été obtenu lors des 2 premiers lancers} comme sous-ensemble de Ω.

c) Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Décrire les éléments de l'événement E_i = {le résultat du i-ième lancer est pile}.

d) Écrire à l'aide des événements E_i l'événement F.

e) Écrire à l'aide des événements E_i l'événement G ={la pièce est tombée au moins une fois sur pile}.

f) Écrire à l'aide des ensembles E_i l'événement H ={la pièce est tombée au moins deux fois sur pile}.

Exercice 3 On dispose d'un sac contenant 10 boules numérotées de 1 à 10. Les 4 boules portant les numéros 1, 2, 3 et 4 sont jaunes et les 6 autres sont vertes.

a) On effectue *3 tirages successifs avec remise* dans ce sac (on remet dans l'urne chaque boule tirée avant de tirer la suivante).

(i) Proposer un espace de probabilité $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), \mathbb{P}_1)$ pour modéliser cette expérience aléatoire.

(ii) Quel est le cardinal de l'ensemble Ω_1 ?

(iii) On considère l'observable $A = \{$tirer trois boules vertes$\}$. Ecrire A comme un sous-ensemble de Ω_1.

(iv) Calculer sa probabilité $\mathbb{P}_1(A)$.

(v) On considère l'observable $B = \{$tirer une boule verte *puis* deux boules jaunes$\}$. Ecrire B comme un sous-ensemble de Ω_1, puis calculer sa probabilité $\mathbb{P}_1(B)$.

(vi) On considère l'observable $C = \{$obtenir au moins une boule de chaque couleur$\}$. Ecrire $\overline{C}$ comme un sous-ensemble de Ω_1, puis calculer la probabilité $\mathbb{P}_1(C)$.

b) On choisit maintenant *3 boules simultanément sans remise* dans ce sac.

(i) Proposer un nouvel espace de probabilité $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), \mathbb{P}_2)$.

(ii) Quel est le cardinal de l'ensemble Ω_2 ?

(iii) Ecrire A comme un sous-ensemble de Ω_2, puis calculer sa probabilité $\mathbb{P}_2(A)$.

(iv) Ecrire $\overline{C}$ comme un sous-ensemble de Ω_2, puis calculer la probabilité $\mathbb{P}_2(C)$.

(v) Peut-on faire quelque chose similaire pour B ?

Exercice 4

On tire, une à une, sans les remettre dans le paquet, cinq cartes dans un jeu de 32 cartes ; chaque succession de cartes ainsi tirées s'appelle une main.

a) Quel est l'espace de probabilité que vous considérez ?

b) Quelle est la probabilité qu'une main contienne :

(i) Que des cartes d'une même couleur [1] ?

(ii) Exactement trois rois ? Au plus un roi ? Au moins un roi ou un as ?

c) Mêmes questions si le tirage se fait avec remise.

1. Dans le jeu de cartes il y a 4 couleurs : $\spadesuit$, $\heartsuit$, $\clubsuit$ et $\diamondsuit$.

Exercice 5

On relève les dates d'anniversaire dans un groupe de 30 personnes (jours numérotés de 1 à 365). On suppose que les jours de naissance sont équiprobables. Quelle est la probabilité que deux personnes au moins aient le même anniversaire ?

Exercice 6

a) En dénombrant les façons de tirer n boules parmi n boules blanches et n boules noires, montrer que :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

b) Retrouver cette formule à partir de l'identité $(1+t)^n(1+t)^n = (1+t)^{2n}$.

c) Deux personnes lancent chacune n fois une pièce de monnaie. Quelle est la probabilité p_n qu'elles obtiennent le même nombre de piles ?

Indication: On utilisera l'équiprobabilité sur l'espace $\Omega = \{\mathtt{f}, \mathtt{p}\}^{2n}$.

d) Donner un équivalent de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Indication: On rappelle la formule de Stirling :

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1+\varepsilon_n), \quad \textit{avec} \quad \lim_{n\to+\infty} \varepsilon_n = 0.$$

e) Que pensez vous de l'affirmation suivante : *Lorsqu'on jette un grand nombre (pair) de fois une pièce équilibrée, il y a une forte probabilité d'obtenir exactement autant de piles que de faces* ?

Exercice 7

Une secrétaire un peu distraite a tapé N lettres et préparé N enveloppes portant les adresses des destinataires, mais elle répartit au hasard les lettres dans les enveloppes. Pour modéliser cette situation, on choisit comme espace probabilisé Ω_N ensemble de toutes les permutations sur $\{1, \ldots, N\}$ muni de l'équiprobabilité P_N. Pour $1 \leqslant j \leqslant N$, on note A_j l'événement *la j-ième lettre se trouve dans la bonne enveloppe.*

a) Calculer $P_N(A_j)$.

b) On fixe k entiers $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ entre 1 et N. Dénombrer toutes les permutations σ sur $\{1, \ldots, N\}$ telles que $\sigma(i_1) = i_1$, $\sigma(i_2) = i_2$, …, $\sigma(i_k) = i_k$. En déduire $P_N(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k})$.

c) On note B l'événement *au moins une des lettres est dans la bonne enveloppe*. Exprimer B à l'aide des A_j.

d) Utiliser la formule de Poincaré pour calculer $P_N(B)$ et sa limite quand N tend vers l'infini.