Interrogation

14 mars 2019

[durée : 2 heures]

Vous êtes autorisés à garder une feuille A4 manuscrite recto-verso.
Tout autre document est interdit. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 (Question de cours - lois usuelles) On définit ci-après plusieurs variables aléatoires (v.a.) discrètes. Pour chacune de ces v.a., indiquer quel est l'ensemble des valeurs possibles, quelle est sa loi (en précisant soigneusement le.s paramètre.s) puis donner une formule pour la probabilité que la v.a. soit égale à 3. *Dans cet exercice, on ne demande pas de justifier ses réponses.*

a) On dispose d'un dé à 6 faces non pipé. On lance le dé autant de fois qu'il le faut jusqu'à obtenir un 6 et on arrête alors le jeu. On note X le nombre de lancers effectués.

b) On dispose d'un dé à 6 faces non pipé. On lance le dé 10 fois. On considère la variable Y qui vaut 1 si on a obtenu au moins une fois 6 au cours de ces 10 lancers et 0 sinon.

c) Parmi les 27 élèves du groupe 1, 10 se sont déclarés de sexe masculin, 15 de sexe féminin et 2 de sexe neutre. Parmi ces 27 élèves, j'en désigne au hasard 5 qui devront corriger un exercice au tableau lors de la prochaine séance. On note Z le nombre d'élèves de sexe masculin parmi les 5 choisis.

Exercice 2 Soit n et m deux entiers supérieurs ou égaux à 4. Une urne contient n boules rouges et m boules jaunes.

a) Dans cette question, on effectue 4 tirages **avec remise**.

(i) Proposer un espace de probabilité $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), \mathbb{P}_1)$ pour modéliser cette expérience.

(ii) Quelle est la probabilité de l'événement A : “les 4 boules sont rouges” ?

(iii) Quelle est la probabilité de l'événement B : “les 4 boules sont de la même couleur” ?

(iv) Quelle est la probabilité de l'événement C : “il y a 2 boules rouges puis 2 boules jaunes (dans cet ordre)” ?

(v) Quelle est la probabilité de l'événement D : “il y a 2 boules rouges et 2 boules jaunes” ?

b) Dans cette question, on choisit **simultanément** 4 boules dans l'urne.

(i) Proposer un espace de probabilité $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), \mathbb{P}_2)$ pour modéliser cette expérience.

(ii) Quelles sont les probabilités respectives de chacun des événements A, B et D dans ce modèle ?

T.S.V.P.

Exercice 3 On dispose d'un lot de 100 dés à 6 faces. Parmi ces 100 dés, 25 sont pipés. Avec un dé pipé, la probabilité d'obtenir un 6 est 1/2 (au lieu de 1/6 avec un dé normal).

a) On choisit un dé au hasard dans le lot et on le lance. Quelle est la probabilité d'obtenir 6 ?

b) On lance le dé choisi et on obtient 6. Quelle est la probabilité que le dé choisi soit pipé ?

c) On relance le dé choisi et on obtient une deuxième fois un 6. Quelle est maintenant la probabilité qu'il soit pipé ?

d) A partir de combien de 6 obtenus à la suite est-on sûr à 95 % que le dé choisi est pipé ?

Exercice 4 Un tournoi de basket rassemble $2n$ équipes : n équipes de première division et n équipes de deuxième division. Chaque équipe joue un match et un seul et il y a donc n rencontres à organiser successivement. On effectue un tirage au sort pour déterminer quelles sont les équipes qui vont s'affronter à chaque rencontre.

a) Si on tient compte de l'ordre dans lequel se jouent les matchs, expliquer soigneusement pourquoi le nombre total de résultats possibles du tirage au sort est de $\dfrac{(2n)!}{2^n}$. *On supposera dans la suite que tous ces résultats ont la même probabilité de se produire.*

b) Déterminer la probabilité p_n que lors du tournoi, toutes les équipes de première division affrontent chacune une équipe de deuxième division.

c) Déterminer la probabilité q_n que toutes les équipes affrontent chacune une équipe de la même division qu'elle. *On pourra distinguer les cas où n est impair et ceux où n est pair.*

d) Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a

$$\frac{2^{2n-1}}{n} \leqslant \binom{2n}{n} \leqslant 2^{2n}.$$

e) En déduire les limites respectives de p_n et q_n quand n tend vers l'infini.