Licence 2e année, mention Mathématiques 2018-2019
M43, Probabilités discrètes

# Interrogation

5 avril 2019

[ durée : 1 heure ]

*Vous êtes autorisés à garder une feuille A4 manuscrite recto-verso.*
*Tout autre document est interdit. Les calculatrices sont interdites.*

**Exercice 1** Le gardien ivre

Un gardien de nuit possède 10 clés, indiscernables dans l'obscurité, dont une seule permet d'ouvrir la porte du département de Mathématiques.

**a)** On s'intéresse à une nuit où le gardien est sobre. Il applique donc une méthode rationnelle : il essaie les clés une par une en écartant à chaque fois les clés déjà essayées. On note $X$ le nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé (Par exemple, s'il trouve la clé du premier coup, alors $X = 1$).

(i) Quelles sont les valeurs possibles de $X$ ?

(ii) Déterminer la loi de $X$.

**b)** On s'intéresse maintenant à une nuit où le gardien est ivre. Cette fois, à chaque essai, il oublie complètement quelles clés il a essayées auparavant (et peut donc réessayer par erreur des clés déjà essayées). On note $Y$ le nombre d'essais nécessaires pour trouver la bonne clé dans ces circonstances (Par exemple, si la clé 1 est la bonne et qu'il a essayé la clé 3, puis la clé 4, puis la clé 3, puis la clé 1, alors $Y = 4$).

(i) Quelles sont les valeurs possibles de $Y$ ?

(ii) Déterminer la loi de $Y$.

**c)** On estime que ce gardien est ivre un soir sur trois. Une nuit, après avoir essayé 8 clés, il n'a toujours pas trouvé la bonne clé. Quelle est la probabilité qu'il soit ivre cette nuit-là ? (On ne cherchera pas à faire l'application numérique).

**Exercice 2** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient $2n$ boules indiscernables au toucher : $n$ boules portent le numéro 0 et les $n$ autres sont numérotées de 1 à $n$. On effectue dans cette urne deux tirages successifs sans remise. On note $X_1$ le premier numéro tiré, $X_2$ le deuxième numéro tiré et $M$ le plus grand des deux.

**a)** Quelles sont les valeurs possibles de $X_1$ ?

**b)** Déterminer la loi de $X_1$.

**c)** Donner, en fonction de $n$, l'expression de chacune des probabilités suivantes :

(i) $P_{\{X_1=0\}}(X_2 = 0)$,

(ii) Pour $\ell \in [\![1, n]\!]$, $P_{\{X_1=0\}}(X_2 = \ell)$,

(iii) Pour $k \in [\![1, n]\!]$, $P_{\{X_1=k\}}(X_2 = 0)$,

(iv) Pour $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2, k \neq \ell$, $P_{\{X_1=k\}}(X_2 = \ell)$.

**d)** Quelles sont l'ensemble des valeurs possibles de $M$ ?

**e)** Déterminer $P(M = 0)$.

**f)** Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, montrer que

$$P(M = k) = \frac{n + k - 1}{n(2n - 1)}.$$