
EXAMEN DE SECONDE SESSION

20 juin 2017

[durée : 3 heures]



Vous êtes autorisés à garder une feuille A4 manuscrite recto-verso.

Tout autre document est interdit. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Si elle est vraie, la démontrer ; sinon, donner un contre-exemple. Aucune réponse non justifiée ne sera prise en compte.

- a) Si X et Y sont deux variables aléatoires de loi de Poisson de paramètre λ , alors $\mathbb{E}(X + Y) = 2\lambda$.
- b) Si X et Y sont deux variables aléatoires de loi de Poisson de paramètre λ , alors $X + Y$ suit une loi de Poisson de paramètre 2λ .
- c) Dans une urne composée de 3 boules blanches et 3 boules rouges, on effectue deux tirages avec remise puis deux tirages sans remise. On note X_k la variable aléatoire qui vaut 1 si la k -ième boule est rouge et 0 sinon. Alors les variables aléatoires X_2 et X_4 ont même loi mais les couples (X_1, X_2) et (X_3, X_4) n'ont pas même loi.
- d) Soient X et Y deux variables aléatoires admettant un moment d'ordre 2. Si $\text{cov}(X, Y) = 0$ alors X et Y sont indépendantes.

Exercice 2 On s'intéresse à deux variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité. La variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre $1/2$ et la variable aléatoire Y suit la loi uniforme sur l'ensemble $\{0, 1, 2\}$. On sait que la covariance du couple (X, Y) est nulle et qu'on a une chance sur douze d'avoir $X + Y = 3$.

- a) Déterminer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{E}(Y)$. En déduire $\mathbb{E}(XY)$.
- b) Trouver la loi du couple (X, Y) en expliquant pas à pas les calculs effectués.
On présentera de préférence le résultat final sous forme d'un tableau.
- c) Ces deux variables aléatoires sont-elle indépendantes ?

Exercice 3 On s'intéresse à la fiabilité d'un alcootest pour automobilistes. Grâce à des études statistiques sur un grand nombre d'automobilistes, on sait que 5% d'entre eux dépassent la dose d'alcool autorisée. Aucun test n'est fiable à 100%. Pour celui que l'on considère, la probabilité que le test soit positif quand la dose d'alcool autorisée est dépassée est 0,95. La probabilité que le test soit négatif quand elle ne l'est pas, vaut aussi 0,95.

- a) On contrôle un automobiliste. Quelle est la probabilité que son test soit positif?
- b) Quelle est la probabilité qu'un automobiliste ayant un test positif ait réellement dépassé la dose d'alcool autorisée?
- c) Un policier affirme : ce test est beaucoup plus fiable le samedi soir à la sortie des boîtes de nuit ! La proportion d'automobilistes ayant trop bu est alors de 50%. En reprenant les deux questions précédentes, justifier la remarque du policier.

Exercice 4

- a) On lance un dé à 6 faces équilibré, on note X le nombre de points obtenus. Pour k de 1 à 5, calculer $P_{\{X \neq 6\}}(X = k)$.
- b) Un joueur lance un dé à 6 faces équilibré. S'il obtient 1, 2, 3, 4 ou 5, il avance son pion du nombre de cases correspondant. S'il obtient 6 il rejoue, et s'il obtient de nouveau 6 il rejoue à nouveau, jusqu'à ce qu'il obtienne 1, 2, 3, 4 ou 5. Il avance alors son pion d'autant de cases qu'il a obtenu de points en tout. On note N le nombre de fois où le joueur lance le dé, Y le nombre de points obtenus lors du dernier lancer et Z le nombre de cases total dont le pion a avancé. *Par exemple, si le joueur a fait 6, 6, 6 et 3, il a donc lancé $N = 4$ fois le dé, a obtenu $Y = 3$ au dernier lancer et a avancé au total de $Z = 21$ cases.*
Donner une expression de la variable aléatoire Z en fonction de N et Y .
- c) Déterminer la loi de N , donner son espérance et sa variance.
- d) Déterminer la loi de Y , donner son espérance et sa variance.
- e) Soit $k \in \mathbb{N}$. Que vaut $\mathbb{P}(Z = 6k)$?
- f) En admettant l'indépendance de N et Y , calculer la loi de Z .
- g) Calculer l'espérance et la variance de Z .