Licence 2e année, mention Mathématiques 2016-2017

M43, Probabilités discrètes

Solutions de l'examen

10 mai 2017

[durée : 3 heures]

Exercice 1 On observe une classe de maternelle composée de 24 élèves. Un jour, la maîtresse regarde la couleur des tee-shirts des enfants. Elle voit que seuls deux enfants portent un tee-shirt jaune.

a) On suppose dans un premier temps que les enfants sont alignés au hasard sur une colonne, les uns derrière les autres. La maîtresse observe la position des deux enfants au tee-shirt jaune.

(i) Décrire un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ associé à cette expérience.

(ii) Quelle est la probabilité que les deux enfants au tee-shirt jaune soient l'un juste derrière l'autre (avec aucun autre enfant entre eux deux) ?

(iii) On note N le nombre d'enfants se trouvant entre les 2 enfants en tee-shirt jaune (l'événement $\{N = 0\}$ correspond au cas où les deux enfants en tee shirt jaune sont l'un juste derrière l'autre). Quelle est la loi de la variable aléatoire N ?

b) On suppose maintenant que les enfants se sont placés au hasard, non pas en colonne mais en rond pour faire une ronde. Quelle est alors la probabilité que les deux enfants en jaune soient côte à côte ?

Solution:

a) (i) On numérote de 1 à 24 les places dans la colonne. La place des deux enfants au tee-shirt jaune est donc une partie à deux éléments de $\{1, \dots, 24\}$. On choisit $\Omega = \mathcal{P}_2(\{1, \dots, 24\})$ muni de la probabilité uniforme.

(ii) On note A l'événement "les deux enfants au tee-shirt jaune sont l'un juste derrière l'autre. A est constitué des ensembles à deux éléments de la forme $\{i, i+1\}$. On a donc $\#A = 23$ et $P(A) = \frac{23}{\binom{24}{2}} = \frac{1}{12}$.

(iii) Il y a entre 0 et 22 enfants entre les enfants au tee-shirt jaune. Pour $k \in \{0, \ldots, 22\}$, l'évenement $\{N = k\}$ est constitué des ensembles à deux éléments de la forme $\{i, i+k+1\}$. On a donc $\#\{N = k\} = 23 - k$ et $P(A) = \frac{23-k}{\binom{24}{2}} = \frac{2*(23-k)}{24*23}$.

b) On note B l'événement "les enfants sont côte à côte". Si les élèves sont en rond, il y a 24 positions pour lesquelles les enfants sont côte à côte et $P(B) = \frac{24}{\binom{24}{2}} = \frac{2}{23}$.

Exercice 2 Une urne contient 7 boules : 2 bleues, 3 jaunes et 2 rouges. On en choisit 3 au hasard (sans remise).

a) Donner un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ permettant de modéliser cette expérience aléatoire.

On note respectivement B, J et R la variable aléatoire correspondant au nombre de boules bleues (resp. jaunes, resp. rouges) parmi les trois boules choisies.

b) Quelle est la probabilité d'obtenir 2 boules rouges ?

c) Quelle est la loi de la variable aléatoire R ?

d) Déterminer la loi du vecteur aléatoire (B, J). *On pourra donner le résultat sous forme d'un tableau.*

e) Calculer $P(B > J)$.

f) Calculer la covariance $\mathrm{cov}(B, J)$ de B et J.

g) Calculer de deux façons différentes $\mathrm{V}(B + J)$ la variance de la variable aléatoire $B + J$.

Solution: Cette expérience aléatoire a été étudiée en détail en cours en introduction du chapitre sur les vecteurs aléatoires. Se référer aux notes de cours ou à l'exemple 4.1 du polycopié.

Exercice 3

a) (Question préliminaire) Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ admettant une espérance, notée $E(Z)$. Montrez que

$$E(Z) = \sum_{j=1}^{\infty} P(Z \geqslant j).$$

Soit $n \geqslant 1$ un entier. Deux joueurs utilisent un dé à n faces (numérotées $1, 2, \ldots, n$) de la manière suivante :

— le joueur A lance le dé, obtient le résultat X, et verse 3 euros au joueur B ;

— le joueur B lance alors le dé jusqu'à ce qu'il obtienne une valeur supérieure ou égale à X (la partie s'arrête alors) ; à chaque lancer, il donne 1 euro au joueur A.

On note M la somme versée au cours de la partie par le joueur B au joueur A.

b) Quelle est la loi de X ?

c) Calculer $P_{\{X=1\}}(M=1)$, puis $P_{\{X=1\}}(M=j)$, pour $j \geqslant 2$.

d) Pour tous $k \geqslant 2$ et $j \geqslant 1$, calculer $P_{\{X=k\}}(M \geqslant j)$ puis $P_{\{X=k\}}(M=j)$ en fonction de n, k et j.

e) Déduire des questions précédentes que, pour $j \geqslant 2$

$$P(M \geqslant j) = \frac{1}{n} \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1}.$$

f) Montrer que la variable M admet une espérance, qui peut s'écrire

$$E(M) = \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n-(k-1)}.$$

g) Quelle est la limite de $E(M)$ quand n tend vers l'infini ?

h) Donner un équivalent de $E(M)$ quand n tend vers l'infini.

i) On dit que le jeu est favorable au joueur A si l'espérance de son gain est positive ou nulle, défavorable sinon. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que, si $n \leqslant n_0$, le jeu est défavorable au joueur A tandis que si $n > n_0$, le jeu lui est favorable.

Solution:

a) Soit Z une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ admettant une espérance. Soit $n \geqslant 2$.

$$\sum_{k=1}^{n} P(Z \geqslant k) = nP(Z \geqslant n) + \sum_{k=1}^{n-1} kP(Z=k). \tag{1}$$

Or, $0 \leqslant nP(Z \geqslant n) = n\sum_{k=n}^{\infty} P(Z=k) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} kP(Z=k)$. Comme Z admet une espérance, le membre de droite est le reste d'une série convergente, donc tend vers 0 quand n tend vers l'infini, il en est donc de même pour $nP(Z \geqslant n)$. Si on revient donc à notre première équation, on en déduit que $\sum_{k=1}^{n} P(Z \geqslant k)$ converge vers $E(Z)$ quand n tend vers l'infini.

b) X suit une loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$

c) Si $X=1$, le joueur B est sûr de faire au moins aussi bien dès le premier lancer. Donc $P_{\{X=1\}}(M=1) = 1$ et $P_{\{X=1\}}(M=j) = 0$ pour $j \geqslant 2$.

d) Pour tous $k \geqslant 2$ et $j \geqslant 1$, $P_{\{X=k\}}(M \geqslant j) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1}$ et $P_{\{X=k\}}(M=j) = \left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1} \frac{n-k+1}{n}$.

e) Soit $j \geqslant 2$. Par la formule des probabilités totales,

$$P(M \geqslant j) = \sum_{k=1}^{n} P_{\{X=k\}}(M \geqslant j)P(X=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} P_{\{X=k\}}(M \geqslant j)P(X=k) = \frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1}.$$

f) Montrons que la série de terme général $P(M \geqslant j)$ est sommable. Pour tout k, la série de terme général $\left(\frac{k-1}{n}\right)^{j-1}$ est sommable comme série géométrique de raison strictement comprise entre 0 et 1. La série de terme général $P(M \geqslant j)$ étant une somme finies de telles séries elle est sommable. Il est aussi facile de vérifier que $jP(M \geqslant j)$ converge vers 0 quand j tend vers l'infini et (1) donne donc que M admet une espérance, qui est donc égale à $\sum_{j=1}^{\infty} P(M \geqslant j)$. En utilisant Fubini puis la formule pour la somme d'une série géométrique, on obtient aisément

$$E(M) = \frac{1}{n} + \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{n-(k-1)}.$$

g) On peut réécrire $E(M) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$. La série harmonique tend vers l'infini.

h) Elle est équivalente à $\ln n$.

i) Le gain du joueur A est $G = M - 3$ donc $E(G) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - 3$. Cette suite est croissante, elle veut -2 pour $n = 1$ et tend vers l'infini quand n tend vers l'infini, ce qui permet de conclure.