LICENCE 2^E ANNÉE, MENTION MATHÉMATIQUES 2017-2018
M43, PROBABILITÉS DISCRÈTES

INTERROGATION

8 mars 2018

[durée : 2 heures]

⚠ *Vous êtes autorisés à garder une feuille A4 manuscrite recto-verso.*
Tout autre document est interdit. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 (Question de cours) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et A, B et C trois événements.

a) Donner une décomposition de $A \cup B$ en sous-ensembles disjoints.

b) En déduire que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

c) Montrer maintenant que

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Exercice 2 On dispose d'un sac contenant 10 boules numérotées de 1 à 10. Les 4 boules portant les numéros 1, 2, 3 et 4 sont jaunes et les 6 autres sont vertes.

a) On effectue *3 tirages successifs avec remise* dans ce sac (on remet dans l'urne chaque boule tirée avant de tirer la suivante).

(i) Proposer un espace de probabilité $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), \mathbb{P}_1)$ pour modéliser cette expérience aléatoire.

(ii) Quel est le cardinal de l'ensemble Ω_1 ?

(iii) On considère l'observable $A = \{\text{tirer trois boules vertes}\}$. Ecrire A comme un sous-ensemble de Ω_1.

(iv) Calculer sa probabilité $\mathbb{P}_1(A)$.

(v) On considère l'observable $B = \{\text{tirer une boule verte } \textit{puis} \text{ deux boules jaunes}\}$. Ecrire B comme un sous-ensemble de Ω_1, puis calculer sa probabilité $\mathbb{P}_1(B)$.

(vi) On considère l'observable $C = \{\text{obtenir au moins une boule de chaque couleur}\}$. Ecrire $\overline{C}$ comme un sous-ensemble de Ω_1, puis calculer la probabilité $\mathbb{P}_1(C)$.

b) On choisit maintenant *3 boules simultanément sans remise* dans ce sac.

(i) Proposer un nouvel espace de probabilité $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), \mathbb{P}_2)$.

(ii) Quel est le cardinal de l'ensemble Ω_2 ?

T.S.V.P.

(iii) Ecrire A comme un sous-ensemble de Ω_2, puis calculer sa probabilité $\mathbb{P}_2(A)$.

(iv) Ecrire $\overline{C}$ comme un sous-ensemble de Ω_2, puis calculer la probabilité $\mathbb{P}_2(C)$.

(v) Peut-on faire quelque chose similaire pour B ?

Exercice 3 On considère une urne contenant au départ une boule verte et une rouge. On effectue une suite de tirages d'une boule selon la procédure suivante. Chaque fois que l'on tire une boule verte, on la remet dans l'urne *en y rajoutant une boule rouge*. Si l'on tire une boule rouge, on arrête les tirages. *On ne demande pas ici de spécifier l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *utilisé.*

On notera V_i l'événement {obtenir une boule verte au i-ième tirage}.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement {le jeu s'arrête au bout de n tirages exactement} à l'aide des événements $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

b) Que vaut $\mathbb{P}_{V_1 \cap \ldots \cap V_{n-1}}(V_n)$ pour $n \geqslant 2$?

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité que le jeu s'arrête au bout de n tirages exactement.

On change maintenant la règle du jeu. Chaque fois que l'on tire une boule verte, on remet cette boule verte dans l'urne *en y rajoutant une boule rouge avec probabilité* p *et une boule verte avec probabilité* $1 - p$. Là encore, le jeu s'arrête dès qu'on tire une boule rouge.

d) Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête au troisième coup exactement ? *On pourra s'aider dans cette question d'un arbre de probabilité.*

Exercice 4 Soit $p \in]0, 1[$. Une pièce a une probabilité p de tomber sur pile et $1 - p$ de tomber sur face. On lance une infinité de fois cette pièce de monnaie. On suppose que les lancers sont indépendants. Pour chaque i de $\mathbb{N}^*$, on note E_i l'événement :

$$E_i = \{\text{la pièce fait pile au lancer numéro } i\}$$

Pour les questions a), b) et c), exprimer l'événement proposé en fonction des $(E_i)_{i \geqslant 1}$ puis calculer la probabilité de l'événement.

a) $A = \{$pendant les 5 premiers lancers la pièce fait toujours face$\}$

b) $B = \{$la pièce fait pile au moins une fois parmi les 10 premiers lancers$\}$

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $C_n = \{$on n'obtient que des pile lors des n premiers lancers$\}$.

d) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $C_{n+1} \subset C_n$. En déduire la probabilité de l'événement $C = \{$on n'obtient que des pile$\}$.

e) Déterminer de même la probabilité de $D = \{$on obtient au moins un pile et au moins un face$\}$