Solutions de l'interrogation

8 mars 2018

[durée : 2 heures]

Exercice 1 (Question de cours) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et A, B et C trois événements.

a) Donner une décomposition de $A \cup B$ en sous-ensembles disjoints.

b) En déduire que $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

c) Montrer maintenant que

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Solution:

a) $A \cup B = (A \backslash (A \cap B)) \cup (B \backslash (A \cap B)) \cup (A \cap B)$

b) Par additivité, $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) - P(A \cap B) + \mathbb{P}(A) - P(A \cap B) + P(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

c) On applique la formule de la question précédente aux ensembles $A' := A \cup B$ et C, $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A \cup B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C)$, puis on la réapplique aux ensembles $A \cap C$ et $B \cap C$.

Exercice 2 On dispose d'un sac contenant 10 boules numérotées de 1 à 10. Les 4 boules portant les numéros 1, 2, 3 et 4 sont jaunes et les 6 autres sont vertes.

a) On effectue *3 tirages successifs avec remise* dans ce sac (on remet dans l'urne chaque boule tirée avant de tirer la suivante).

(i) Proposer un espace de probabilité $(\Omega_1, \mathcal{P}(\Omega_1), \mathbb{P}_1)$ pour modéliser cette expérience aléatoire.

(ii) Quel est le cardinal de l'ensemble Ω_1 ?

(iii) On considère l'observable $A = \{\text{tirer trois boules vertes}\}$. Ecrire A comme un sous-ensemble de Ω_1.

(iv) Calculer sa probabilité $\mathbb{P}_1(A)$.

(v) On considère l'observable $B = \{\text{tirer une boule verte } \textit{puis} \text{ deux boules jaunes}\}$. Ecrire B comme un sous-ensemble de Ω_1, puis calculer sa probabilité $\mathbb{P}_1(B)$.

(vi) On considère l'observable $C = \{\text{obtenir au moins une boule de chaque couleur}\}$. Ecrire $\overline{C}$ comme un sous-ensemble de Ω_1, puis calculer la probabilité $\mathbb{P}_1(C)$.

b) On choisit maintenant *3 boules simultanément sans remise* dans ce sac.

(i) Proposer un nouvel espace de probabilité $(\Omega_2, \mathcal{P}(\Omega_2), \mathbb{P}_2)$.

(ii) Quel est le cardinal de l'ensemble Ω_2 ?

(iii) Ecrire A comme un sous-ensemble de Ω_2, puis calculer sa probabilité $\mathbb{P}_2(A)$.

(iv) Ecrire $\overline{C}$ comme un sous-ensemble de Ω_2, puis calculer la probabilité $\mathbb{P}_2(C)$.

(v) Peut-on faire quelque chose similaire pour B ?

Solution:

a) (i) On prend $\Omega_1 := \{1, 2, \ldots, 10\}^3$ et $\mathbb{P}_1$ la probabilité uniforme sur Ω_1.

(ii) $\#\Omega_1 = 10^3 = 1000$

(iii) $A = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\}^3$

(iv) $\mathbb{P}_1(A) = \frac{6^3}{10^3} = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$.

(v) $B = \{5, 6, 7, 8, 9, 10\} \times \{1, 2, 3, 4\}^2$ et $\mathbb{P}_1(B) = \frac{6 \times 4^2}{10^3} = \frac{12}{125}$.

(vi) $\overline{C} = A \cup \{1, 2, 3, 4\}^3$. On en déduit que $\mathbb{P}_1(C) = 1 - \mathbb{P}_1(A) - \frac{4^3}{10^3} = \frac{125-27-8}{125} = \frac{18}{25}$.

b) (i) On prend $\Omega_2 = \mathcal{P}_3(\{1, 2, \ldots, 10\})$ et $\mathbb{P}_2$ la probabilité uniforme sur Ω_2.

(ii) $\#\Omega_2 = \binom{10}{3} = 120$.

(iii) $A = \mathcal{P}_3(\{5, \ldots, 10\})$ et $\mathbb{P}_2(A) = \frac{\binom{6}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$.

(iv) $\overline{C} = A \cup \mathcal{P}_3(\{1, 2, 3, 4\})$ et $\mathbb{P}_2(C) = 1 - \mathbb{P}_2(A) - \frac{\binom{4}{3}}{\binom{10}{3}} = \frac{120-20-4}{120} = \frac{96}{120} = \frac{4}{5}$.

(v) Non car Ω_2 ne code pas l'ordre dans lequel on tire les boules.

Exercice 3 On considère une urne contenant au départ une boule verte et une rouge. On effectue une suite de tirages d'une boule selon la procédure suivante. Chaque fois que l'on tire une boule verte, on la remet dans l'urne *en y rajoutant une boule rouge.* Si l'on tire une boule rouge, on arrête les tirages. *On ne demande pas ici de spécifier l'espace de probabilité* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *utilisé.*

On notera V_i l'événement $\{\text{obtenir une boule verte au } i\text{-ième tirage}\}$.

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $\{\text{le jeu s'arrête au bout de } n \text{ tirages exactement}\}$ à l'aide des événements $(V_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$.

b) Que vaut $\mathbb{P}_{V_1 \cap \ldots \cap V_{n-1}}(V_n)$ pour $n \geqslant 2$?

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la probabilité que le jeu s'arrête au bout de n tirages exactement.

On change maintenant la règle du jeu. Chaque fois que l'on tire une boule verte, on remet cette boule verte dans l'urne *en y rajoutant une boule rouge avec probabilité p et une boule verte avec probabilité* $1-p$. Là encore, le jeu s'arrête dès qu'on tire une boule rouge.

d) Quelle est la probabilité que le jeu s'arrête au troisième coup exactement ? *On pourra s'aider dans cette question d'un arbre de probabilité.*

Solution:

a) {le jeu s'arrête au bout de n tirages exactement} $= \bigcap_{i=1}^{n-1} V_i \cap \overline{V}_n$.

b) Si on a tiré $n-1$ boules vertes, l'urne contient n boules rouges et une boule verte, $\mathbb{P}_{V_1 \cap \ldots \cap V_{n-1}}(V_n) = \frac{1}{n+1}$.

c) La probabilité que le jeu s'arrête au bout de n tirages exactement est

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\cap_{i=1}^{n-1} V_i \cap \overline{V}_n) &= \mathbb{P}(V_1)\mathbb{P}_{V_1}(V_2)\mathbb{P}_{V_1 \cap V_2}(V_3) \ldots \mathbb{P}_{V_1 \cap \ldots V_{n-2}}(V_{n-1})\mathbb{P}_{V_1 \cap \ldots \cap V_{n-1}}(\overline{V}_n) \\ &= \left(\prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i+1}\right) \times \frac{n}{n+1} = \frac{n}{(n+1)!}.\end{aligned}$$

d) On appelle $\tilde{\mathbb{P}}$ la nouvelle probabilité (qui dépend du paramètre p et on cherche $\tilde{\mathbb{P}}(V_1 \cap V_2 \cap \overline{V}_3)$. En s'aidant d'un arbre de probabilité, on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{P}}(V_1 \cap V_2 \cap \overline{V}_3) &= \frac{1}{2}\left[\frac{p}{3}\left(\frac{p}{4} + \frac{1-p}{2}\right) + \frac{2}{3}(1-p)\left(\frac{p}{2} + \frac{3}{4}(1-p)\right)\right] \\ &= \frac{1}{24}(p^2 - 6p + 6)\end{aligned}$$

Exercice 4 Soit $p \in]0,1[$. Une pièce a une probabilité p de tomber sur pile et $1-p$ de tomber sur face. On lance une infinité de fois cette pièce de monnaie. On suppose que les lancers sont indépendants. Pour chaque i de $\mathbb{N}^*$, on note E_i l'événement :

$$E_i = \{\text{la pièce fait pile au lancer numéro } i\}$$

Pour les questions a), b) et c), exprimer l'événement proposé en fonction des $(E_i)_{i \geqslant 1}$ puis calculer la probabilité de l'événement.

a) $A = $ {pendant les 5 premiers lancers la pièce fait toujours face}

b) $B = $ {la pièce fait pile au moins une fois parmi les 10 premiers lancers}

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit $C_n = $ {on n'obtient que des pile lors des n premiers lancers}.

d) Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $C_{n+1} \subset C_n$. En déduire la probabilité de l'événement $C = $ {on n'obtient que des pile}.

e) Déterminer de même la probabilité de $D = $ {on obtient au moins un pile et au moins un face}

Solution:

a) $A = \cap_{i=1}^{5} \overline{E_i}$. Comme les lancers sont indépendants, $\mathbb{P}(A) = \prod_{i=1}^{5} \mathbb{P}(\overline{E_i}) = (1-p)^5$.

b) $B = \cup_{i=1}^{1} 0E_i$. on a $\mathbb{P}(B) = 1 - \mathbb{P}(\cap_{i=1}^{10} \overline{E_i}) = 1 - (1-p)^{10}$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $C_n = \cap_{i=1}^{n} E_i$.

d) Si C_{n+1} est réalisé, on n'a obtenu que des piles aux $n+1$ premiers lancers ; en particulier, on n'a obtenu que des piles aux n premiers lancers et C_n est réalisé. On a donc $C_{n+1} \subset C_n$. La suite $(C_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est donc une suite décroissante d'événements et par continuité de la probabilité par limite décroissante, on a $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(\cap_{n \in \mathbb{N}^*} C_n) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(C_n) = \lim_{n \to \infty} p^n = 0$.

e) De même, si on pose $D_n := \{$la pièce fait pile au moins une fois parmi les n premiers lancers$\}$, on peut vérifier que $(D_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante d'événements. Par continuité de la probabilité par limite croissante, on a $\mathbb{P}(D) = \mathbb{P}(\cup_{n \in \mathbb{N}^*} D_n) = \lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(D_n) = \lim_{n \to \infty}(1 - (1-p)^n) = 1$.