SOLUTIONS DE L'INTERROGATION

10 mars 2017

[durée : 2 heures]

Exercice 1

Une boîte contient 8 cubes : 1 gros rouge et 3 petits rouges, 2 gros verts et 1 petit vert, et enfin 1 petit jaune.
Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boîte (on suppose que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur).

a) Proposer un espace de probabilité permettant de modéliser cette expérience aléatoire.

Dans la suite, on demande de donner les résultats sous forme de fractions irréductibles.

b) Calculer la probabilité de l'événement A : « obtenir des cubes de 3 couleurs différentes ».

c) Calculer la probabilité de l'événement B : « obtenir au plus un petit cube ».

Solution:

a) On numérote de 1 à 8 les huit cubes : 1 le gros rouge, 2, 3 et 4 les petits rouges, 5 et 6 les gros verts, 7 le petit vert et enfin 8 le petit jaune. Soit $\mathcal{C} = \{1, 2, \ldots, 8\}$ l'ensemble des cubes. Ainsi on peut prendre $\Omega = \{P \in \mathcal{P}(\mathcal{C}) | \# P = 3\}$, l'ensemble des parties à 3 éléments de $\mathcal{C}$, avec la probabilité uniforme.

b) Nous avons $\#\Omega = C_8^3 = \frac{8.7.6}{1.2.3} = 56$ et donc la probabilité d'un événement élémentaire est de $\frac{1}{56}$. Pour avoir trois cubes des trois couleurs différentes, nous avons 4 choix possibles pour le cube rouge, 3 choix possibles pour le cube vert et un seul choix pour le cube jaune. Ainsi on constate qu'il y a $4 \times 3 \times 1 = 12$ événements élémentaires à 3 couleurs différentes. En conclusion $P(A) = 12 \times \frac{1}{56} = \frac{3}{14}$.

c) Dans le lot il y a 5 petits et 3 gros cubes. Le nombre d'événement élémentaires à 0 petits et 3 gros cubes est $C_5^0 \times C_3^3 = 1$ (il y a qu'un seul choix possible de 3 gros cubes), et le nombre d'événements élémentaires à 1 petit et 2 gros cubes est $C_5^1 \times C_3^2 = 15$. Ainsi $P(B) = (1 + 15) \times \frac{1}{56} = \frac{2}{7}$.

Exercice 2

Dans une colonie de vacances, on organise le jeu suivant. On a disposé le long d'un parcours 10 balises. Un concurrent court le long du parcours : à chaque fois qu'il arrive à une balise, on lui tend trois enveloppes extérieurement identiques. L'une contient une étiquette portant le numéro 1, une autre contient une étiquette portant le numéro 2 et la dernière le numéro 3. Il en choisit une au hasard et prend l'étiquette qui s'y trouve. S'il découvre un chiffre qu'il n'a pas encore, il le garde, sinon il le jette. Le concurrent a gagné [1] dès qu'il a collecté les trois numéros 1, 2 et 3.

a) Proposer un espace de probabilité permettant de modéliser cette expérience aléatoire.

b) Calculer la probabilité qu'au bout du parcours le concurrent n'ait collecté que l'étiquette 1.

c) Calculer la probabilité qu'au bout du parcours il n'ait pas collecté l'étiquette 3.

d) Calculer la probabilité qu'il perde.

e) Calculer la probabilité qu'il trouve l'étiquette 2 avant l'étiquette 3.

f) Calculer la probabilité qu'il gagne exactement à la 5^{e} balise.

Solution:

a) On peut supposer que les coureurs ne s'arrête pas après avoir « gagné » et qu'au final tous les concurrents obtiennent 10 étiquettes portant les numéros 1, 2 ou 3. Ainsi on peut choisir pour $\Omega = \{1, 2, 3\}^{10}$ avec l'équiprobabilité où chaque événement élémentaire (une suite ordonnée de 10 étiquettes) a une probabilité $\frac{1}{3^{10}}$.

Notons E_i l'événement « le concurrent n'a collecté que l'étiquette i », et E_{ij} l'événement « le concurrent n'a collecté que des étiquettes i ou j ».

b) $P(E_1) = \frac{1}{3^{10}}$ car c'est un événement élémentaire.

c) $P(E_{12}) = \frac{2^{10}}{3^{10}}$ car il y a 2^{10} suites ordonnées à 10 étiquettes composée que de 1 ou de 2.

d) D'après la formule de Poincaré

$$P(\text{« perdre »}) = P(E_{12}) + P(E_{13}) + P(E_{23}) - P(E_1) - P(E_2) - P(E_3),$$

car $E_{ij} \cap E_{ik} = E_i$ si $j \neq k$, et $E_{12} \cap E_{13} \cap E_{23} = \varnothing$. Comme dans la question précédente : $P(E_{13}) = P(E_{23}) = \frac{2^{10}}{3^{10}}$, et comme dans la question b) $P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3^{10}}$, ainsi $P(\text{« perdre »}) = 3 \times \frac{2^{10}}{3^{10}} - 3 \times \frac{1}{3^{10}} = \frac{2^{10}-1}{3^9}$.

e) La probabilité de trouver l'étiquette 2 avant l'étiquette 3 est la même que celle de trouver l'étiquette 3 avant l'étiquette 2. Ces deux événements sont disjoints et leur union est « le concurrent a trouvé 2 ou 3 » (dont la négation est E_1).

---

1. Plusieurs concurrents peuvent être gagnants.

Ainsi nous avons $P(\text{« 2 avant 3 »})+P(\text{« 3 avant 2 »})+P(E_1) = 1$ avec $P(\text{« 2 avant 3 »}) = P(\text{« 3 avant 2 »})$ et on peut conclure que cette probabilité est de

$$P(\text{« 2 avant 3 »}) = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{3^{10}}).$$

f) Le nombre de configurations contenant des étiquettes 1 et 2 dans les 4 premières balises et l'étiquette 3 dans la 5^{e} est de $2^4 - 2$ (on enlève les deux configurations contenant que des 1 ou que des 2 dans les 4 premières balises). Et c'est le même nombre dans les deux autres cas où on gagne à la 5^{e} balise avec un 1 ou avec un 2. Ainsi la probabilité de gagner à la 5^{e} balise est de $3 \times \frac{2^4-2}{3^5} = \frac{14}{81}$.

Exercice 3

Dans une maternité, on sait que

— 10% des accouchements ont lieu avant terme,

— 40% des accouchements avant terme présentent des complications,

— 20% des accouchements à terme présentent des complications.

a) Quelle est la probabilité de l'événement « l'accouchement présente des complications » ?

b) On sait que Madame B. a eu un accouchement avec des complications. Quelle est la probabilité que son accouchement ait eu lieu avant terme ?
(On donnera la réponse sous forme d'une fraction irréductible.)

Solution: On note AT l'événement « l'accouchement a lieu avant terme » et C l'événement « l'accouchement a des complications ». Ainsi nous savons que $P(AT) = \frac{1}{10}$, $P_{AT}(C) = \frac{4}{10}$ et $P_{\overline{AT}}(C) = \frac{2}{10}$ et on peut en déduire aussi les probabilités complémentaires $P(\overline{AT}) = \frac{9}{10}$, $P_{AT}(\overline{C}) = \frac{6}{10}$ et $P_{\overline{AT}}(\overline{C}) = \frac{8}{10}$.

a) $P(C) = P(C \cap AT) + P(C \cap \overline{AT}) = P_{AT}(C).P(AT) + P_{\overline{AT}}(C).P(\overline{AT})$
$= \frac{4}{10}\frac{1}{10} + \frac{2}{10}\frac{9}{10} = \frac{22}{100} = \frac{11}{50}$.

b) $P_C(AT) = \frac{P(C\cap AT)}{P(C)} = \frac{P_{AT}(C).P(AT)}{P(C)} = \frac{4/100}{22/100} = \frac{2}{11}$.

Exercice 4

On dispose de 3 dés à 6 faces. Le dé A porte sur ses faces les numéros $4, 4, 4, 4, 0, 0$ (4 faces portent un 4 et 2 faces un 0) ; le dé B porte le numéro 3 sur toutes ses faces et le dé C portent les numéros $6, 6, 2, 2, 2, 2$ (2 faces portent un 6 et 4 faces un 2). On lance les trois dés [2] et on note $\{A > B\}$ l'événement « le résultat du dé A est supérieur au résultat du dé B ».

a) Déterminer la probabilité de l'événement $\{A > B\}$.

Si la probabilité de l'événement $\{A > B\}$ est strictement supérieure à $1/2$, on dit que « le dé A est plus fort que le dé B ».

b) Parmi les dés A et B, est-ce que l'un des deux dés est plus fort ?

c) De la même façon, parmi les dés B et C, est-ce que l'un des deux dés est plus fort ?

2. Les résultats des 3 dés sont considérées indépendants.

d) Parmi les dés A et C, est-ce que l'un des deux dés est plus fort ?

e) Montrer qu'avec ces 3 dés, quel que soit le dé choisi par un joueur, son adversaire peut toujours choisir un dé *plus fort*.

A partir de maintenant, on change un peu les règles du jeu : on lance chaque dé deux fois et on fait la somme des deux résultats obtenus. On note X_A (resp. X_B, resp. X_C) la variable aléatoire qui donne la somme des résultats de deux lancers indépendants du dé A (resp. du dé B, resp. du dé C).

f) Déterminer la loi de chacune des variables aléatoires X_A, X_B et X_C.

On dit que « le dé A est plus costaud que le dé B » si l'événement $\{X_A > X_B\}$ *a une probabilité strictement supérieure à* $1/2$.

g) Montrer que C est plus costaud que B.

h) Qu'en est-il pour A et B ? Qu'en est-il pour A et C ?

i) Si je joue à cette deuxième version du jeu, quel dé ai-je intérêt à choisir ?

Solution:

a) $P(A > B) = P(A = 4) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

b) D'après la question précédente « A est plus fort que B » car $P(A > B) > \frac{1}{2}$.

c) $P(B > C) = P(C = 2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$ et donc « B est plus fort que C ».

d) $P(C > A) = P(C = 6) + P(C = 2, A = 0) = \frac{2}{6} + \frac{4}{6} \times \frac{2}{6} = \frac{5}{9} > \frac{1}{2}$ et donc « C est plus fort que A ».

e) C'est une conséquence directe des trois questions précédentes car A est plus fort que B, qui est plus fort que C, qui plus fort que A.

f) Nous avons $X_A \in \{0, 4, 8\}$ avec $P(X_A = 0) = P(A = 0)^2 = \frac{1}{9}$, $P(X_A = 8) = P(A = 4)^2 = \frac{4}{9}$ et donc finalement $P(X_A = 4) = 1 - \frac{1}{9} - \frac{4}{9} = \frac{4}{9}$.
Nous avons $X_B \in \{6\}$ avec $P(X_B = 6) = 1$.
Nous avons $X_C \in \{4, 8, 12\}$ avec $P(X_C = 4) = P(C = 2)^2 = \frac{4}{9}$, $P(X_C = 12) = P(C = 6)^2 = \frac{1}{9}$ et donc finalement $P(X_C = 8) = 1 - \frac{4}{9} - \frac{1}{9} = \frac{4}{9}$.

g) $P(C + C > B + B) = P(X_C = 8) + P(X_C = 12) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} = \frac{5}{9} > \frac{1}{2}$ et donc « C est plus costaud que B ».

h) $P(B + B > A + A) = P(X_A = 0) + P(X_A = 4) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{5}{9} > \frac{1}{2}$, donc « B est plus costaud que A ».
$P(C + C > A + A) = P(X_C = 12) + P(X_C = 8)P(X_A < 8) + P(X_C = 4)P(X_A < 4) = \frac{1}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} + \frac{4}{9} \times \frac{1}{9} = \frac{34}{81} < \frac{1}{2}$, et $P(A + A > C + C) = P(A = 8)P(C = 4) = \frac{4}{9} \times \frac{4}{9} = \frac{16}{81} < \frac{1}{2}$.
Ainsi, ni A ni C n'est plus costaud que l'autre.

i) D'après les deux questions précédentes il existe un dé plus costaud que A et un dé plus costaud que B. J'ai donc intérêt à choisir C qui est plus costaud que B et qui n'est pas moins costaud que A.