 Mylene.Maida@math.univ-lille1.fr

Devoir à la maison n°2
Le processus de Poisson
À rendre le jeudi 16 octobre 2014

Soit $\lambda > 0$. On dit que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est un *processus de Poisson de paramètre* λ si cette famille de variables aléatoires (v.a.) vérifie :

a. $Y_0 = 0$,

b. $\forall k \geq 2,\ \forall 0 \leq t_1 < \cdots < t_k$, les v.a. $Y_{t_2} - Y_{t_1}, \cdots, Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}$ sont indépendantes,

c. si $0 \leq s < t$, $Y_t - Y_s$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t-s)$.

L'objet de ce problème est d'étudier certaines propriétés du processus de Poisson (exercices 1. et 3.) et de comprendre son importance pour la modélisation de certains phénomènes aléatoires (exercice 2.).

Exercice 1. On s'intéresse au processus aléatoire suivant : on considère une vitre dans un lieu exposé. À chaque fois qu'elle est cassée, on la remplace. On se demande comment se comporte le nombre de vitres cassées au bout du temps t.

Pour $n \geq 1$, on note X_n la durée de vie de la n-ième vitre. On suppose dans tout le problème que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de (v.a.) indépendantes et toutes de même loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. On commence à observer au temps 0 ($S_0 = 0$) et pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note S_n le temps au bout duquel la vitre est cassée pour la n-ième fois. Exprimer S_n en fonction des variables $(X_n)_{n\geq 1}$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que la loi du vecteur aléatoire $(S_1, \ldots, S_n)$ a pour densité f_n avec
$$f_n(t_1, \ldots, t_n) := \begin{cases} \lambda^n e^{-\lambda t_n} & \text{si } 0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$
3. Déterminer la densité de la loi de la variable S_n.
4. Pour $t \geq 0$, on note N_t le nombre de bris de vitres observés dans l'intervalle de temps $[0, t]$. Exprimer l'événement $\{N_t = 0\}$ en fonction de X_1 puis calculer la probabilité de cet événement.
5. Pour $k \in \mathbb{N}$, exprimer l'événement $\{N_t \geq k\}$ en fonction de S_k puis montrer que N_t suit une loi de Poisson, dont on exprimera le paramètre en fonction de λ et de t.
6. Justifier que $P(N_t < \infty) = 1$.

On veut montrer que le processus $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre λ.

7. Soient $0 \leq s \leq t$ et $k, \ell \in \mathbb{N}$. Exprimer l'événement $\{N_s = k, N_t - N_s = \ell\}$ à l'aide des variables $(S_n)_{n\geq 1}$, puis calculer sa probabilité en utilisant la question 2.
8. Soient $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_n$ et $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{N}$. Procéder de la même façon avec l'événement $\{N_{t_1} = k_1, \forall 2 \leq i \leq n, N_{t_i} - N_{t_{i-1}} = k_i\}$.
9. En déduire que $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson.

Exercice 2. Un *processus ponctuel* $(T_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{R}^+$ est une suite croissante de réels aléatoires $0 = T_0 < T_1 < T_2 < \ldots < T_n < \ldots$ qui sont des v.a. définies sur un même espace de probabilités et telles que $\lim_{n\to\infty} T_n = +\infty$.

Un processus $(M_t)_{t\geq 0}$ est dit *processus de comptage* s'il existe un processus ponctuel $(T_n)_{n\geq 0}$ sur $\mathbb{R}^+$ tel que, pour tout $t \geq 0$,

$$M_t = \sup\{n; T_n \leq t\}.$$

On se propose de montrer que **le processus de Poisson est le seul processus de comptage à accroissements indépendants et stationnaires.**

Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ un processus de comptage tel que

d. $\forall k \geq 2,\ \forall 0 \leq t_1 < \cdots < t_k$, les v.a. $M_{t_2} - M_{t_1}, \cdots, M_{t_k} - M_{t_{k-1}}$ sont indépendantes,

e. si $0 \leq s < t$, la loi de $M_t - M_s$ ne dépend que de $t - s$.

1. Pour u dans $]0,1]$ et $t \geq 0$, on pose $f_u(t) = \mathbb{E}[u^{M_t}]$. Pour $t, s \geq 0$, calculer $f_u(t+s)$ et trouver une équation fonctionnelle pour la fonction f_u.
2. Soit $u \in]0,1]$. Justifier que la fonction f_u est décroissante et non identiquement nulle. Que peut-on en déduire ?
3. Si on note $(T_n)_{n\geq 0}$ le processus ponctuel dont $(M_t)_{t\geq 0}$ est le processus de comptage, justifier l'inclusion
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{M_{nt} = 0, M_{(n+1)t} \geq 2\} \subset \{T_2 < T_1 + t\}.$$
En déduire que
$$\frac{1}{1 - P(M_t = 0)} P(M_t \geq 2) \leq P(T_2 < T_1 + t),$$
puis que $\frac{1}{t} P(M_t \geq 2)$ tend vers zéro quand t tend vers zéro.
4. En déduire qu'il existe $c > 0$ tel que, pour tout $u \in]0,1]$,
$$\lambda(u) := \lim_{t\downarrow 0} \frac{1}{t}(1 - f_t(u)) = c(1-u)$$
5. Conclure.

Exercice 3. **(paradoxe de l'autobus)**
Soit $(N_s)_{s\geq 0}$ un processus de Poisson de paramètre λ. Pour tout $n \geq 1$, on pose $T_n = \inf\{t; N_t = n\}$ (Autrement dit, avec les définitions de l'exercice 2., $(T_n)_{n\geq 0}$ est le processus ponctuel dont $(N_s)_{s\geq 0}$ est le processus de comptage).

1. Pour $n \geq 1$, on pose $X_n = T_n - T_{n-1}$. Vérifier que $(X_n)_{n\geq 1}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre λ.

On fixe $t > 0$ et on note T_{N_t} et T_{N_t+1} la première arrivée respectivement avant et après t. On pose ensuite $V_t = T_{N_t+1} - t$ et $W_t = t - T_{N_t}$.

2. En vous référant à l'exercice 1., rappeler pourquoi V_t est indépendante de $\sigma(N_s, s \leq t)$ et quelle est sa loi.
3. Déterminer la loi de W_t.
4. Calculer $E(T_{N_t+1} - T_{N_t})$.

On constate donc que lorsqu'on arrive à l'arrêt de bus, l'écart moyen entre le bus qui vient de passer et celui qui va arriver est près de deux fois supérieur à l'écart moyen entre deux bus. Ce fait est souvent appelé "paradoxe de l'autobus".