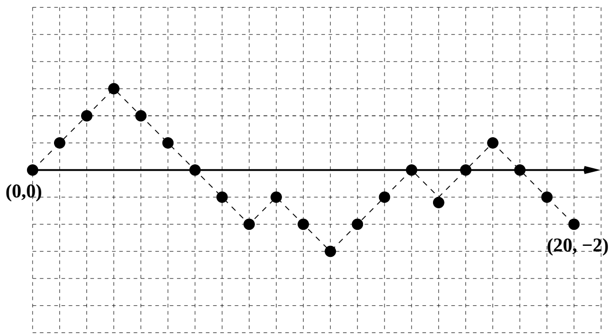
M1 Maths 2014-2015 Université Lille 1
Probabilités M407 Mylene.Maida@math.univ-lille1.fr

Devoir à la maison n°1
La marche aléatoire simple à horizon fini
À rendre le jeudi 25 septembre 2014

Rappel (formule de Stirling) : $n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}\left(1 + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$.

Nous considérons un marcheur qui se déplace aléatoirement dans l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers, en partant de 0. A chaque unité de temps, le marcheur lance une pièce de monnaie : si elle tombe sur "pile", il fait un pas vers la droite (son abscisse augmente de 1), si elle tombre sur "face", il fait un pas vers la gauche (son abscisse diminue de 1). Il effectue n lancers successifs de la pièce.
Le résultat de l'expérience aléatoire – la marche jusqu'à l'instant n – peut donc être codée par un n-uplet de -1 et de 1, c'est-à-dire par un élément de $\Omega = \{-1, 1\}^n$.
On pourra penser à représenter la marche par une ligne polygonale dans $\mathbb{R}^2$ (qu'on appellera dans la suite un chemin), partant de l'origine et portant la position du marcheur en fonction du temps.

Par exemple, si le marcheur a effectué $n = 20$ lancers et a obtenu successivement 3 fois "pile", 5 fois "face", "pile", 2 fois "face", 3 fois "pile, "face", 2 fois "pile" et enfin 3 fois "face", le résultat sera représenté par le chemin suivant :



Pour n, m et k entiers avec $0 \leq k \leq n$, on note $A_{k,m}$ l'événement "Au temps k, le marcheur se trouve à l'abscisse m".

Dans notre exemple, les événements $A_{3,3}$ et $A_{20,-2}$ sont réalisés.

Dans tout le problème, sauf l'avant-dernière question, on suppose que la pièce est équilibrée, donc que tous les chemins sont équiprobables. En résumé, on travaillera dans tout le problème (sauf la question 12.) dans l'espace de probabilité $(\{-1, 1\}^n, \mathcal{P}(\{-1, 1\}^n), \mathbb{P})$, avec $\mathbb{P}$ la probabilité uniforme sur $\{-1, 1\}^n$.

1. L'entier strictement positif k étant fixé, quelles sont les valeurs de m pour lesquelles $A_{k,m}$ n'est pas l'événement impossible ? [On pensera à distinguer selon les parités respectives de k et m].
2. Quelle est la probabilité de $A_{k,m}$?

3. On s'intéresse en particulier au retour à l'origine du marcheur. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, quelle est la probabilité de $A_{2k+1,0}$? quelle est la probabilité de $A_{2k,0}$?
4. Donner un équivalent de $A_{2k,0}$ quand k tend vers l'infini.

On s'intéresse maintenant au premier retour à l'origine du marcheur. Pour cela, on a besoin du lemme suivant, souvent appelé "principe de réflexion" : *soient $A = (a, \alpha)$ et $B = (b, \beta)$ deux points à coordonnées entières avec $0 \leq a < b$, $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. Soit $A' = (a, -\alpha)$ le symétrique de A par rapport à l'axe des abscisses. Alors le nombre de chemins de A à B qui touchent ou traversent l'axe des abscisses est égal au nombre total de chemins de A' à B.* On ne demande pas de montrer ce lemme.

5. Soient x et n des entiers strictement positifs de même parité.
   (a) Quel est le nombre total de chemins allant du point $(1, 1)$ au point (n, x) ?
   (b) En utilisant le principe de réflexion, déterminer quel est le nombre de chemins allant du point $(1, 1)$ au point (n, x) qui touchent ou traversent l'axe des abscisses.
   (c) Déduire des deux questions précédentes que le nombre de chemins de $(0, 0)$ à (n, x) qui restent au dessus de l'axe des abscisses sans le toucher après l'instant 0 est $\frac{x}{n}\binom{n}{\frac{n+x}{2}}$.
6. Application 1 : calculer la probabilité pour que le premier retour en zéro du marcheur ait lieu à l'instant $2n$. Montrer qu'elle peut se réécrire comme $\frac{1}{2n-1}\mathbb{P}(A_{2n,0})$.
7. Application 2 : dans une élection à deux candidats, le candidat A reçoit a votes et le candidat B reçoit b votes, avec $a > b$. Quelle est la probabilité que le candidat A soit strictement en tête tout au long du dépouillement ? Attention, dans cette question, on ne travaille plus dans l'espace $(\{-1, 1\}^n, \mathcal{P}(\{-1, 1\}^n), \mathbb{P})$; on commencera par déterminer un nouvel espace de probabilité approprié.
8. Pour tout $n \geq 1$, on note a_n la probabilité qu'il n'y ait aucun retour en zéro jusqu'à l'instant $2n$. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a la relation
$$a_{n-1} = a_n + \frac{1}{2n-1}\mathbb{P}(A_{2n,0}).$$
   En déduire que la probabilité qu'il n'y ait aucun retour en zéro jusqu'à l'instant $2n$ est égale à $\mathbb{P}(A_{2n,0})$.
9. Montrer la probabilité que l'abscisse du joueur reste positive ou nulle jusqu'à l'instant $2n$ est aussi égale à $\mathbb{P}(A_{2n,0})$.

On peut aussi examiner le temps de dernier retour à l'origine.

10. On se donne $0 < k < n$. Montrer que la probabilité $p_{n,k}$ pour que le dernier retour en zéro avant le temps $2n$ ait lieu à l'instant $2k$ est égale à $\mathbb{P}(A_{2k,0})\mathbb{P}(A_{2n-2k,0})$, puis exprimer cette probabilité.
11. Soit $0 < x < 1$. Montrer que lorsque n tend vers l'infini, $np_{n,\lfloor nx \rfloor}$ est équivalent à $f(x)$, pour une fonction $f :]0, 1[\to \mathbb{R}^+$ que l'on déterminera. Tracer l'allure de la fonction f. Est-ce conforme à l'intuition ?
12. On suppose enfin que la pièce utilisée par le marcheur n'est plus équilibrée mais a une probabilité $p \in]0, 1[$ de tomber sur "pile" à chaque lancer. Reprendre le problème (et si besoin modifier la formulation des questions) dans ce cas.
13. Question subsidiaire : savez-vous montrer la formule de Stirling rappelée au début ?