Suites : Limites

Exercice 1 (u_n) une suite. On dit que (u_n) est positive si tous ses termes sont positifs. Vrai ou Faux :

1. Si (u_n) est positive et non majorée, alors elle tend vers $+\infty$?
2. Si (u_n) est positive et $\lim u_n = 0$, alors (u_n) est décroissante à partir d'un certain rang ?
3. Si $\lim u_n = \ell > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certanin rang ?
4. Si (u_n) converge vers ℓ, alors toute sous-suite de (u_n) converge également vers ℓ ?

Exercice 2 Que peut-on dire sur la convergence d'une suite (u_n) tel que :
(i) $\lim nu_n = 0$? (ii) $\lim nu_n = 0$? (iii) $\lim nu_n = +\infty$?

Exercice 3 Etudier la convergence des suites suivantes :

$$1)\ \sqrt{n^2+4n=1}-n \quad , \quad 2)\ \frac{n-(-1)^n}{n+(-1)^n} \quad , \quad 3)\ (-1)^n\frac{n+1}{n+2}$$

$$4)\ \frac{1+(-1)^n n}{2+n} \quad , \quad 5)\ \frac{2^n-3^n}{2^n+3^n} \quad , \quad 6)\ \sqrt[n]{n}$$

Exercice 4 En utilisant le théorème des gendarmes, decider de la convergence des suites suivantes :

$$1)\ \left(\frac{1}{3}\sin n\right)^n \quad , \quad 2)\ \frac{e^{-n\cos^2 n}}{n+1} \quad , \quad 3)\ \sqrt[n]{3+\cos n}$$

$$4)\ \sum_{k=0}^{n}\frac{n}{n^2+k} \quad , \quad 5)\ u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^2+k^2} \quad , \quad 6)\ \frac{n!}{n^n}$$

Exercice 5 Un théorème du cours affirme que : *toute suite croissante et majorée converge.* De façon analogue : *toute suite décroissante et minorée converge.*
Utiliser ce théorème pour montrer la convergence de la suite

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n\cdot(n-1)\cdots 2\cdot 1}$$

On montrera tout d'abord que pour tout $k>0$ on a $2^{k-1}\leqslant k!$

Exercice 6 Même question que précédemment avec $u_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^k}$. On pourra comparer $\frac{1}{k^k}$ avec $\frac{1}{2^k}$.

Exercice 7 Montrer par l'absurde que la suite définie par $u_0=1$ et $u_{n+1}=u_n+\frac{1}{u_n}$ n'admet pas de limite.