Suites Récurrentes, Séries

Exercice 1
1. Donner un exemple de deux suites (u_n) et (v_n) telles que les séries de terme général u_n et v_n divergent et telles que la série de terme général $u_n + v_n$ converge.
2. Peut-on avoir deux suites (u_n), et (v_n) telles que les séries de terme général un et v_n convergent et telles que la série de terme général $u_n + v_n$ diverge ?
3. Que peut-on dire sur la série de terme général u_n+v_n si la série de terme général un converge, et la série de terme général v_n diverge ?

Exercice 2 Etudier la nature des séries

$$\sum_{k\geqslant 0} \frac{3^k}{4^{k+1}} \quad , \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{n+1}{n^3+2}$$

Exercice 3 Etudier la nature des séries de terme général

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)} \quad , \quad v_n = \frac{1}{\sqrt{n-1}+\sqrt{n}}$$

(on pensera à écrire $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$).

Exercice 4 Etudier la nature des séries de terme général u_n

$$\frac{n^2}{n^2+1} \quad , \quad \frac{\ln(n)}{n^3} \quad , \quad \sin\frac{1}{n}$$

Exercice 5 $a \in [0,1[$. Ecrire $\frac{1}{(1-a)^2}$ comme produit de deux séries. En déduire la somme de la série $\sum_{k\geqslant 0} ka^k$.

Exercice 6 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 \\ u_{n+1} = \frac{4}{4-u_n} \end{cases}$.

(a) Determiner u_0 pour que cette suite soit constante.
(b) On suppose $u_0 < 2$. Montrer que u_n est majorée par 2 et strictement croissante.
(c) Pour $u_0 < 2$, la suite converge t-elle ? Donner une représentation graphique.
(d) On suppose que $u_0 = -1$ et on pose $v_n = \frac{1}{u_n-2}$. Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.

Exercice 7 Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$.

(a) Calculer u_2, u_3, u_4.
(b) Montrer par récurrence que $0 < u_{n+1} \leqslant u_n$.

Exercice 8 émontrez par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, $3^{2n+2} - 2^{n+1}$ est divisible par 7.