
Devoir Surveillé no. 2 (Outils Mathématiques)

24 Mars 2011

Exercice 1 En calculant $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2$, en déduire la formule

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \frac{1}{2} (\|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2 - \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|^2)$$

En déduire que pour un triangle quelconque du plan (voir figure), on a la relation métrique suivante

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

Exercice 2 (coordonnées sphériques)

- (a) Décrire l'ensemble des points de l'espace qui vérifient l'équation : $\rho \sin \phi = 2$.
- (b) Représentez graphiquement la surface décrite par les conditions : $0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{3}$ et $\rho = 2$.

Exercice 3 Cherchez une équation du plan :

- (a) Qui passe par le point $(6, 5, -2)$ et parallèle au plan $x + y - z + 1 = 0$.
- (b) Qui passe par l'origine et les points $(1, 1, 1)$ et $(1, 2, 3)$.

Exercice 4 Pour m paramètre fixé, trouvez tous les vecteurs \vec{v} qui vérifient

$$\begin{pmatrix} m & 1 & 1 \\ 1 & 1 & m \end{pmatrix} \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Décrire graphiquement l'ensemble des solutions dans l'espace lorsque $m = 2$.

Exercice 5 (a) En quels points les droites

$$D_1 : \left\{ (x, y, z) \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, \quad D_2 : \left\{ (x, y, z) \mid \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

se coupent-elles ?

- (b) Quelle est une équation du plan que ces droites déterminent ?