Continuité, Dérivées Partielles Premières

Exercice 1 La fonction

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

est-elle continue sur son domaine de définition ? Même question pour

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+xy+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Exercice 2 Calculez les dérivées partielles premières comme indiqué :
(a) $f(x,y) = xe^{-y} + 3y \quad , \quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(1,0)$
(b) $z = x\sqrt{y} - \dfrac{y}{\sqrt{x}} \quad , \quad \dfrac{\partial z}{\partial x}, \dfrac{\partial z}{\partial y}$.
(c) $f(x,y) = \displaystyle\int_0^x ye^t dt$.

Exercice 3 La fonction de "Cobb-Douglas" exprime la production d'un pays P (la valeur monétaire de tous les biens produits en un an) en terme de L (la quantité de travail ou nombre d'heures prestées en un an) et K la quantité de capital investi (valeur monétaire de toutes les machines, équipement et bâtiments). Cette fonction prend la forme

$$P = bL^\alpha K^\beta$$

avec β et α des constantes strictement positives. Montrer que P satisfait à l'équation

$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha+\beta)P$$

Exercice 4 Si u est fonction des variables x, y, z, alors on peut prendre des dérivées partielles itérées (qu'on appelle dérivées seconde, d'ordre 3, etc). On notera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) \quad , \quad \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right)$$

Si $u = \ln(x + 2y^2 + 3z^3)$, calculer $\dfrac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

Exercice 5 Ecrire la derivée partielle au point P indiqué en *termes de limite*
(a) $f(x,y) = \cos(x+y) \quad , \quad P = (0, \frac{\pi}{2})$
(b) $g(x,y) = \dfrac{x}{y} \quad , \quad P = (1,1)$.

Exercice 6 La hauteur des vagues h en haute mer dépend principalement de la force v du vent et du temps t pendat lequel le vent souffle à cette vitesse. Des valeurs de la fonction $h = f(v,t)$ sont rassemblés dans la table suivante.

(a) Quelle signification ont les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial v}$ et $\frac{\partial h}{\partial t}$?

(b) Estimez les valeurs de $\frac{\partial h}{\partial v}(40,15)$ et $\frac{\partial h}{\partial t}(40,15)$. Quelle est l'interprétation concrète de ces valeurs ?

(c) Quelle semble être la valeur de la limite suivante

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{\partial h}{\partial t} \quad ?$$

Durée (en heures)

Vitesse du vent (en nœuds) v \ t	5	10	15	20	30	40	50
10	2	2	2	2	2	2	2
15	4	4	5	5	5	5	5
20	5	7	8	8	9	9	9
30	9	13	16	17	18	19	19
40	14	21	25	28	31	33	33
50	19	29	36	40	45	48	50
60	24	37	47	54	62	67	69

Exercice 7 Voici un diagramme de courbes de niveau d'une fonction f. D'après cette figure, estimez $\frac{\partial f}{\partial x}(2,1)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(2,1)$