L2, Fonctions Plusieurs Variables, année 2007-2008

Notions Générales et Résumé des TDs

Voici en revue le plus gros des notions vues et étudiées en TD. [1]

On écrira $P = (x_1, \ldots, x_n)$ un point de $\mathbb{R}^n$. De même pour $P_0 = (a_1, \ldots, a_n)$. On dénotera par $\vec{e}_i$ le i-ème vecteur de base $(0 \cdots 0, 1, 0, \cdots, 0)$.

Les réponses aux exercices sont données à la fin de cette note.

1. Continuité, Différentiabilité

Une fonction à n-variables $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, définie sur un sous-ensemble U de $\mathbb{R}^n$, est continue au point $P_0 = (a_1, \ldots, a_n)$ si la limite de $f(P) = f(x_1, \ldots, x_n)$, lorsque le point P tend vers P_0 suivant n'importe quel chemin dans $\mathbb{R}^n$, est $f(P_0)$.

On peut parler de la dérivée d'une fonction en un point suivant une certaine direction

(la derivée directionnelle). La dérivée suivant un vecteur $\vec{u} \in \mathbb{R}^n$ au point P_0 est dénotée $D_{\vec{u}} f(P_0)$ et est définie par

$$D_{\vec{u}} f(P_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t\vec{u}) - f(P_0)}{t}$$

La notation $P_0 + t\vec{u}$ veut dire $(a_1 + tu_1, \ldots, a_n + tu_n)$ ou $u_1, \ldots, u_n$ sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}$. Si $\vec{e}_i$ est le i-eme vecteur de la base standard, alors on vérifie que

$$D_{\vec{e}_i} f(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0) = \lim_{x_i \to a_i} \frac{f(a_1, \ldots, x_i, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{x_i - a_i}$$

Exercice 1.1. *Soit* $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. *Calculer* $D_{\vec{v}} f(0,0)$ *ou* $\vec{v} = (1,1)$.

On verra dans la section 3 qu'il est possible de calculer les dérivées directionnelles rapidement à l'aide de l'opérateur gradient.

Exercice 1.2. *Soit f l'application définie sur* $\mathbf{R}^2$ *par*

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 \cos\left(\dfrac{y}{x}\right) & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Etudier l'existence et la continuité des derivées partielles premières de f sur $\mathbf{R}^2$

1.1. **Schwartz.** On peut évidemment itérer l'opération de différentiation et obtenir des dérivées partielles secondes, etc. Il est donc utile de savoir si on arrive à la même chose en dérivant tout d'abord par rapport à x puis à y ($\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$) ou en dérivant tout d'abord en y puis x ($\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$). Ceci n'est certainement pas toujours vrai. Par contre un théorème de Schwartz stipule que si les dérivées partielles secondes de f existent et si elles sont *continues* au point P_0, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(P_0)$.

[1] Ce résumé n'est pas exhaustif. Il est inévitable que des erreurs de frappe se soient glissées dans ce fichier et donc faire attention. Si par contre certaines affirmations ne correspondent pas avec votre cours, prière de m'en aviser. Le cours reste votre référence première.

2. Différentiabilité, Plan tangent

Une fonction est différentiable en P_0 si la limite d'un certain ratio est nulle

$$\lim_{P\to P_0} \frac{f(x_1,\dots,x_n)-f(a_1,\dots,a_n)-\frac{\partial f}{\partial x_1}(P_0)(x_1-a_1)-\cdots-\frac{\partial f}{\partial x_n}(P_0)(x_n-a_n)}{|\overrightarrow{PP_0}|}=0 \tag{1}$$

Quand on parle de différentiabilité en un point on supposera toujours que la fonction est définie dans une petite boule centrée en ce point (c'est notre petit voisinage).

Si l'une des dérivées partielles de f n'existe pas (en P_0), ou si toute autre dérivée directionnelle n'existe pas, alors f n'est pas différentiable en ce point. Si par contre toutes les dérivées partielles existent et sont continues, alors f est différentiable (ceci est un théorème). On dira aussi dans ce cas que f est C^1.

Des théorèmes généraux nous permettent d'affirmer que la somme, produit et quotient de fonctions C^1 est C^1.

Exercice 2.1. *(a) La fonction* $f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$ *est-elle différentiable sur* $\mathbb{R}^2$ *?*
(b) Même question pour la fonction de l'exercice 1.

Exercice 2.2. *Pour n un entier positif ou nul, on considère*

$$f(x,y)=\begin{cases}(x+y)^n\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & ,(x,y)\neq(0,0)\\ 0 & ,(0,0)\end{cases}$$

(a) f est continue et différentiable sur $\mathbf{R}^2-\{(0,0)\}$. Pourquoi?
(b) Etudier suivant la valeur de n la continuité en $(0,0)$.
(c) En utilisant la définition de la diffentiabilité comme limite d'un quotient, déterminer pour quelles valeurs de n, f est différentiable en $(0,0)$.

Remark 2.3. Dans le cas ou f est différentiable, l'équation du plan tangent au graphe de f au point $P_0=(a_0,\dots,a_n)$ a pour équation

$$z=f(P_0)+\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)(x_i-a_i) \tag{2}$$

Par définition on voit donc que la fonction est différentiable en P_0 si la valeur de $f(P)$ est très proche de la valeur du plan tangent dans un voisinage proche de P_0. Ceci nous permet en particulier d'obtenir une bonne approximation de $f(P)$ pour P proche de P_0, par la valeur $z(P)$ du plan tangent en P_0 (approximation linéaire). Voir plus bas.

2.1. Jacobienne, Dérivées Fonctions Composées.

On peut étendre ces notions à des fonctions

$$f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m \quad,\quad f(P)=f(x_1,\dots,x_n)=(f_1(P),\cdots,f_m(P))$$

Les dérivées partielles $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ sont collectées dans une matrice $Jac(f)$ la Jacobienne, et cette matrice permet de trouver la dérivée directionnelle de f dans n'importe quelle direction $\vec{u}$.

Il faut retenir que pour une composée de fonctions C^1 $\mathbb{R}^n\xrightarrow{f}\mathbb{R}^m\xrightarrow{g}\mathbb{R}^k$ est le produit matriciel

$$Jac(g\circ f)(P)=Jac(g)(f(P))\cdot Jac(f)(P)$$

avec $P=(x_1,\dots,x_n)$, $f(P)=(f_1(P),\dots,f_m(P))$.

Example 2.4. La dérivée d'une fonction $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ est $\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{df}{dx}$.
Pour une fonction $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, la matrice Jacobienne au point $P\in\mathbb{R}^n$ est

$$Jac(f)(P)=\begin{pmatrix}\frac{\partial f}{\partial x_1}(P) & \cdots & \frac{\partial f}{x_n}(P)\end{pmatrix}$$

Remarque (et Notation): On remarquera que si $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$ comme ci-dessus, $P=(x_1,\dots,x_n)$ et $P_0=(a_1,\dots,a_n)$ alors

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)(x_i-a_i)=Jac(f)(P_0)\overrightarrow{PP_0}$$

On peut donc "s'amuser" à réécrire l'équation de la différentiabilité (1) de la façon compacte suivante: si on pose $\vec{h}=\overrightarrow{PP_0}$, alors

$$\begin{aligned} f(P) &= f(P_0)+\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)(x_i-a_i)+|\vec{h}|\epsilon(\vec{h}) \\ &= f(P_0)+Jac(f)(P_0)\vec{h}+|\vec{h}|\epsilon(\vec{h}) \end{aligned}$$

La fonction f est donc différentiable en P_0 si et seulement si $\lim_{\vec{h}\to\vec{0}}\epsilon(\vec{h})=0$. Ceci est l'approximation de Taylor de f en degré 1.

L'écriture ci-haut est valable plus généralement pour une fonction $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^m$.

Exercice 2.5. *Etant donné que* $g(s,t)=f(s^2-t^2,t^2-s^2)$ *et que* f *est différentiable, montrez que* g *vérifie l'équation*

$$t\frac{\partial g}{\partial s}+s\frac{\partial g}{\partial t}=0$$

Exercice 2.6. .
(a) Soit $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ *définie par* $f(x,y)=(x+y^2,xy^2z)$. *Ecrire la matrice jacobienne de* f.
(b) Soit $g:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^3$ *définie par* $g(u,v)=(u^2+v,uv,e^v)$. *Ecrire la matrice jacobienne de* g.
(c) Determiner la jacobienne de $g\circ f$ *au point* (x,y,z).

Exercice 2.7. *la longueur* l*, la largeur* L *et la hauteru* h *d'une boite varient dans le temps. A un moment donné les dimensions sont* $l=1m$ *et* $L=2m$*, croissant tous les deux à raison de* $2m/s$*, et* $h=2m$ *diminuant de* $3m/s$*. Déterminez le taux de variation des grandeurs suivantes, à cet instant (a) le Volume, (b) la Surface, (c) La longueur d'une diagonale.*

2.2. **Approximation Linéaire.** Nous avons remarqué que pour f différentiable dans un petit voisinage U de P_0, $P\in U$, alors

$$f(P)\approx f(P_0)+\sum\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)=f(P_0)+\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)(x_i-a_i)=f(P_0)+\sum_i\frac{\partial f}{\partial x_i}(P_0)\Delta x_i$$

ou on a écrit $\Delta x_i=(x_i-a_i)$, et ou $\approx$ veut dire "approximativement". Pour pouvoir estimer l'erreur dans cette approximation il faut écrire un développement de Taylor à un ordre plus grand. Ceci est hors programme.

Exercice 2.8. *(a) Donner (à la main) une valeur approchée de* $(1,9992)^2\times 3,0012$.
(b) Donner une valeur approchée de $e^{0,2}/0,9$.

3. Gradient et derivée directionnelle

Nous avons introduit la notion du gradient d'une fonction à plusieurs variables. Si $f(x_1, \ldots, x_n)$ est une telle fonction, alors

$$\overrightarrow{grad}(f)(P) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(P)\vec{e}_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)\vec{e}_n$$

ou $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ est la base standard de $\mathbb{R}^n$. Ce gradient a plusieurs utilités.

Remark 3.1. Notons d'après la définiton que $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable au point $\vec{x}_0$ si

$$\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \frac{f(\vec{x}) - f(\vec{x}_0) - \overrightarrow{grad}(f)(\vec{x}_0)\cdot(\vec{x}-\vec{x}_0)}{||\vec{x}-\vec{x}_0||} = 0$$

3.1. **Dérivée Directionnelle.** Nous avons argumenté que si f est différentiable en $U \subset \mathbb{R}^n$, alors f admet une dérivée dans la direction de n'importe quel vecteur (unitaire) $\vec{u}$ qu'on notera $D_{\vec{u}}f$. Le gradient permet de calculer cette dérivée directionnelle suivant la formule

$$\boxed{D_{\vec{u}}f = \vec{u}\cdot\overrightarrow{grad}f}$$

pour $\vec{u}$ un vecteur unitaire dans $\mathbb{R}^n$.

Exercice 3.2. *Donner une formule pour $D_{\vec{u}}f$ si $\vec{u}$ n'est pas unitaire.*

Exercice 3.3. *Déterminer l'expression de la dérivée $D_{\vec{u}}(x,y)$ si*

$$f(x,y) = x^3 - 3xy + 4y^2$$

et $\vec{u}$ est le vecteur unitaire d'angle $\theta = \frac{\pi}{6}$. Que vaut $D_{\vec{u}}(1,2)$?
Les réponses: $\frac{1}{2}\left(3\sqrt{3}x^2 - 3x + (8-3\sqrt{3})y\right)$ et $\frac{1}{2}(13-3\sqrt{3})$.

Exercice 3.4. *On considère le cone $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ dans $\mathbb{R}^3$. Calculer la dérivée directionnelle $D_{\vec{u}}f$ au point $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ pour un vecteur unitaire $\vec{u} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix} = \cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2$. Pour quelle valeur de θ cette dérivée est-elle maximum au point (a,b), $a\neq 0$?*

Remark 3.5. (Interprétation) Le gradient d'une fonction scalaire $f(x,y,z)$ est un vecteur qui pointe vers la direction de la plus grande variation (positive) de f et dont la norme est égale à la dérivée dans cette direction. L'exemple 3.4 est très illustratif.

3.2. **Equation de Plan Tangent.** Le gradient permet également d'écrire les équations de plans tangents à des surfaces dans $\mathbb{R}^3$. En effet soit $U\subset\mathbb{R}^3$, $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application C^1 sur U et soit (S) la surface d'équation cartesienne $g(x,y,z) = 0$. Alors (S) est une surface dans $\mathbb{R}^3$. Par exemple

$$g(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-1 = 0$$

est la sphère de rayon 1. Soit $P = (a,b,c)$ un point de (S); c'est à dire qui satisfait $g(a,b,c) = 0$ et supposons que $\overrightarrow{grad}(g)(P) \neq \vec{0}$, alors
Le plan tangent à (S) au point P est normal à $\overrightarrow{grad}(g)(P)$ et admet pour équation cartesienne

$$(x-a)\frac{\partial g}{\partial x}(P) + (y-b)\frac{\partial g}{\partial y}(P) + (z-c)\frac{\partial g}{\partial z}(P) = 0$$

Example 3.6. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à deux variables. En posant $g(x, y, z) = z - f(x, y)$ retrouver que le plan tangent à la surface $g(x, y, z) = 0$ (le graphe de f) au point $P = (a, b, c) = (a, b, f(a, b))$ est donné par l'équation qu'on connait déjà (voir(2))

$$(x-a)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) + (y-b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) - (z - f(a,b)) = 0$$

Exercice 3.7. *Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface d'équation* $x \sin z - y \cos z = 0$ *au point* $A = (1, 1, \pi/4)$.

Exercice 3.8. *On considère l'ellipsoide* $\mathcal{E}$ *dans* $\mathbf{R}^3$, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 3$.
(a) Determiner les points d'intersection de $\mathcal{E}$ *avec les trois axes de coordonnées et le représenter dans l'espace. (b) Donner l'equation du plan tangent à la surface* $\mathcal{E}$ *au point* $(2, 3, 1)$. *(c) En quels points de* $\mathcal{E}$ *le plan tangent est-il parallèle au plan* $z = 0$*?*

Exercice 3.9. *Deux surfaces dans* $\mathbb{R}^3$ *sont dites* **perpendiculaires** *en un point d'intersection si leurs normales (c'est à dire les normales aux plans tangents en ce point) sont perpendiculaires en ce point. (a) Démontrer que des surfaces d'équations* $F(x, y, z) = 0$ *et* $G(x, y, z) = 0$ *sont perpendiculaires en* P *tel que* $\overrightarrow{grad}F \neq 0 \neq \overrightarrow{grad}G$, *si et seulement si*

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial G}{\partial z} = 0$$

au point P. *(b) Montrer alors que les surfaces*

$$F : z^2 = x^2 + y^2 \quad , \quad G : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

sont perpendiculaire en chacun de leurs points d'intersection. Essayer de voir pourquoi il en est ainsi sans aucun calcul.

Remark 3.10. (Champ Vectoriel et Potentiel) L'opérateur gradient $\overrightarrow{grad}$ associe à une fonction scalaire $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^n$, un champ vectoriel gradient sur U, c'est à dire il associe un vecteur $\overrightarrow{f}(P) \in \mathbb{R}^n$ en tout P de U. On peut se poser la question inverse : étant donné un champ vectoriel $\vec{F} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ qui a tout point $P \in \mathbb{R}^n$ associe un vecteur $F(P) \in \mathbb{R}^n$, quand est-ce que $\vec{F}$ est un champ de gradients; c'est à dire sous quelles conditions il existerait une fonction scalaire f (ou potentiel scalaire) tel que $\vec{F} = \overrightarrow{grad}(f)$? On renvoie à la section 7 pour les details.

4. C^1-Difféomorphismes, Inversion Locale, Changements de Variables

Il est très fréquent en mathématiques de devoir changer de point de vue pour résoudre un problème. En algèbre linéaire par exemple, un endomorphisme f peut être représenté par des matrices simples ou compliquées suivant le choix de la base. Autre exemple: pour évaluer $I = \int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}dx$ on change la variable en $u = x^2 + 1$ et on réécrit I

$$\int_1^2 \frac{2x}{x^2+1}dx = \int_2^5 \frac{du}{u} = \ln 5 - \ln 2$$

On peut évidemment faire la même chose pour des fonctions de plusieurs variables.

Soit U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$. On dit que $f : U \longrightarrow V$ est un changement de variable si f est différentiable, bijective et de réciproque f^{-1} qui est différentiable. Puisque f est bijective, elle est certainement surjective et donc $f(U) = V$.

Un changement de variable est aussi dit C^1 difféomorphisme.

Remark 4.1. L'application $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$, $x\mapsto x^3$ est différentiable, bijective mais son inverse $x\mapsto\sqrt[3]{x}$ n'est pas différentiable en 0. Par suite $f(x)=x^3$ n'est pas un changement de variable sur $\mathbb{R}$ dans notre sens.

Pour montrer qu'un f donné est un C^1-difféo et en pratique, il est souvent dur de devoir calculer f^{-1} et en plus de devoir montrer qu'elle est différentiable. Le critère suivant nous permet d'éviter pas mal de calculs:

Theorem 4.2. *Soit $f:U\longrightarrow\mathbb{R}^n$, $U\subset\mathbb{R}^n$ ouvert, une application de classe C^1 qui est injective. Si le Jacobien de f en tout point $a\in U$ est $\neq 0$, alors f est un C^1-difféomorphisme de U sur $f(U)$. De plus $Jac(f^{-1})(b)=Jac(f)(a)^{-1}$ ou $b=f(a)$.*

On rappelle que le Jacobien de f au point P est le déterminant $\det[Jac(f)(P)]$ de la matrice jacobienne en ce point. Notons que la dernière formule généralise la formule

$$f^{-1}(b)=1/f'(f^{-1}(b)$$

pour le cas d'une seule variable.

Exercice 4.3. *Montrer que $\phi:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto(e^x-e^y,x+y)$ est un changement de variable. Ecrire la jacobienne de ϕ^{-1}.*

Exercice 4.4. *(Coordonnées Polaires)*

Exercice 4.5. *Soit $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$, $(x,y)\mapsto(\sin\frac{y}{2}-x,\sin\frac{x}{2}-y)$.*
(a) Justifier que f est C^1, calculer sa differentielle et voir que $Jac(f)$ est inversible sur $\mathbb{R}^2$.
(b) Montrer que f est un C^1-difféo de $\mathbb{R}^2$ sur son image et justifier que $f(\mathbb{R}^2)$ est un ouvert.
(c) Calculer $Jac(f^{-1})(p)$ ou $p=(1-\frac{\pi}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}-\pi)$.
(Pour la partie (a) on pourra utiliser exemple 5.1.

4.1. **Inversion Locale.** Une fonction de Jacobienne non nulle en un point $a\in U$ est localement inversible (en particulier localement injective). Plus precisemment.

Theorem 4.6. *Soit $f:U\subset\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ un champ de vecteurs différentiable et $a\in U$ tel que les dérivées partielles de f sont contenues en a. On suppose que D_af est bijective. Alors il existe 2 ouverts V,W de $\mathbb{R}^n$ tel que la restriction*

$$f_|:V\longrightarrow W\ ,\ a\in V,f(a)\in W$$

soit un C^1-difféomorphisme.

Exercice 4.7. *L'image par $f:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}^n$ d'un ouvert par un C^1-diffeomorphisme est un ouvert.*

4.2. **Equations aux dérivées partielles de premier ordre.** Soit $U\subset\mathbb{R}^2$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, on voudrait étudier les équations différentielles d'inconnue $f:U\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe C^1, et de la forme

$$a(x,y)\frac{\partial f}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}=g(x,y)\tag{3}$$

Supposons que nous changions nos variables de (x,y) à (u,v). Ceci veut dire que nous exprimons $(u,v)=\phi(x,y)$ avec $\phi:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}^2$ un changement de variables. L'expression de $f(x,y)$ en terme de u,v devient alors $f(x,y)=F(u,v)$ ou $F=f\circ\phi^{-1}$. On peut alors réécrire l'EDP (3) en terme de $\frac{\partial F}{\partial u}$ et $\frac{\partial F}{\partial v}$. Un changement de variable judicieux peut parfois ramener (3) en une nouvelle EDP de la forme

$$\frac{\partial F}{\partial u}=G_1(u,v)\quad ou\quad \frac{\partial F}{\partial v}=G_2(u,v)\tag{4}$$

qui devient alors facile à résoudre.

Le passage de (3) à (4) se fait grâce aux formules

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} \qquad , \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}$$

ou on souligne $f(x,y) = F(u,v) = F(\phi(x,y)) = F \circ \phi(x,y)$.

Exercice 4.8. *On considère l'EDP:* $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$ *sur* $U = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$.
(a) Résoudre cette EDP à l'aide du changement de variable $u = x, v = \frac{y}{x}$.
(b) Résoudre cette EDP en passant en polaires.

5. Accroissements Finis

Le théorème d'AF classique (une seule variable) affirme que si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue, dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$$

On en déduit que $\forall (x,y) \in]a,b[$,

$$|f(y) - f(x)| \leq Sup_{t\in]a,b[}|f'(t)||x-y|$$

Example 5.1. Montrer que $|\sin x - \sin y| \leq |x-y|$ pour tout $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer de même que $|\ln(1+x)| \leq |x|$ pour $x > -1$.

La version à plusieurs variables est analogue. Si $a, b \in \mathbb{R}^n$, le segment de points entre a et b dans $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble des points $[a,b] := \{a + t(b-a), 0 \leq t \leq 1\}$.

Theorem 5.2. *Soit* $f : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ *différentiable sur* U. *Soient* $a, b \in U$ *tel que* $[a,b] \subset U$. *On écrit* $a = (a_1, \ldots, a_n)$ *et* $b = (b_1, \ldots, b_n)$. *Alors* $\exists t, 0 \leq t \leq 1$, *tel que*

$$f(b) - f(a) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(a + t(b-a))(b_1 - a_1) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(a + t(b-a))(b_n - a_n)$$

La formule des accroissements finis prend la forme: $\exists c \in D$ (ou encore $c \in [a,b]$) tel que

$$|f(b_1, \ldots, b_n) - f(a_1, \ldots, a_n)| \leq \sum \left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)\right| |b_i - a_i| \tag{5}$$

Exercice 5.3. *Soit* $U \subset \mathbb{R}^n$ *convexe. Si* f *a toutes ses dérivées partielles nulles sur* U, *alors* f *est constante.*

5.1. **Calcul d'Incertitude.** Considérons tout d'abord le cas d'une fonction à une seule variable $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$ fonction differentiable.

Question: Supposons que l'on mesure x la variable avec une erreur (ou incertitude) δx, avec quelle erreur pouvons nous estimer $y = f(x)$?

Une *erreur* $\epsilon(x)$ sur une quantité mesurée x est par definition la différence entre la valeur réelle x_r de cette quantité et sa valeur mesurée x_m. Si

$$|\epsilon(x)| = |x_r - x_m| \leq \delta x$$

Alors

$$|\epsilon(y)| := |f(x_r) - f(x_m)| \leq M|x_r - x_m| \leq M\delta x$$

avec M un majorant de $|f'(x)|$ sur $]x_m - \delta x, x_m + \delta x[$. On remarquera que le majorant $M\delta x$ est determiné par la donnée de x_m et δx et non x_r valeur que l'on connait pas a priori.

Definition 5.4. *Une précision est une majoration de l'incertitute. Plus precisemment δT est une précision dans la mesure d'une quantité physique T si $|T_{reel} - T_{mesuree}| \leq \delta T$.*

Example 5.5. Estimer la précision sur la mesure de $2x - \sin x$ si x est mesurée avec une erreur d'au plus δx?
RÉPONSE: En posant $f(x) = 2x - \sin x$, définie sur l'intervalle $]x_m - \delta x, x_m + \delta x[$, on obtient une majoration

$$|f'(x)| \leq 2|x| + |\sin x| \leq 2|x| + 1 \leq 2(|x_m| + \delta x) + 1$$

Une estimation de l'erreur sur $y = f(x)$ est donc

$$\delta y \leq (2(|x_m| + \delta x) + 1)\delta x$$

Example 5.6. Soit $T = kPV$ l'equation des gaz parfaits, ou T est la température, P la pression et V le volume. On a les données suivantes

$$|P_m - P_r| \leq \delta P \quad , \quad |V_m - V_r| \leq \delta V$$

Donner une précision $\epsilon(T)$ sur la mesure de T calculée a partir des mesures de P et V.
RÉPONSE: Nous souhaitons majorer l'incertitute $|T_r - T_m|$. On pose $T = f(P, V) = kPV$ et $\Delta(T) = |f(P_r, V_r) - f(P_m, V_m)|$. La formule des accroissements finis (5) indique qu'il existe c dans le segment $[(P_r, V_r), (P_m, V_m)]$ tel que

$$\begin{aligned} |\epsilon(T)| = |f(P_r, V_r) - f(P_m, V_m)| &\leq \left|\frac{\partial T}{\partial P}(c)\right| |P_m - P_r| + \left|\frac{\partial T}{\partial V}(c)\right| |V_m - V_r| \\ &\leq \left|\frac{\partial T}{\partial P}(c)\right| \delta P + \left|\frac{\partial T}{\partial V}(c)\right| \delta V \\ &\leq M_1 \delta P + M_2 \delta V \end{aligned}$$

ou M_1 est un majorant de $\left|\frac{\partial T}{\partial P}(P, V)\right|$ et M_2 un majorant de $\left|\frac{\partial T}{\partial V}(P, V)\right|$ pour les valeurs de (P, V) tel que $V_m - \delta V \leq V \leq V_m + \delta V$ et $P_m - \delta P \leq P \leq P_m + \delta P$. Comme $\frac{\partial T}{\partial P}(P, V) = kV$, $\frac{\partial T}{\partial V}(P, V) = kP$, on obtient que

$$\begin{aligned} \delta T &\leq k(V_m + \delta P)\delta P + k(P_m + \delta V)\delta V \\ &\leq k(V_m \delta P + P_m \delta V) + k\delta P \delta V \end{aligned}$$

L'erreur *principale* dans ce cas est $k(V_m \delta P + P_m \delta V)$ le terme $k\delta P \delta V$ étant *négligeable*.

Example 5.7. Donner une valeur approximative ła variation de $\frac{(x+y)}{(x-y)}$ lorsque x varie de $x = 2$ à $x = 2,5$ et y de 4 à $4,5$.
(b) Donner une varleur approchée de $\ln(1,02)^{1/4} + (0,96)^{1/6} - 1)$ et de $\frac{e^{0,2}}{0,9}$
(c) Les longeurs x et y des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sont connues avec une précision inférieure ou égale respectivement à h et k. Encadrer l'erreur avec laquelle sera calculée l'aire du triangle.

Example 5.8. La période T d'un pendule exprimée en secondes est donnée par la formule $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ où ℓ est sa longueur exprimée en mètres et g l'accélération de la pesanteur en mètres par seconde au carré.
(a) Calculer T pour $\ell = 2m$, $g = 9,81m/s^2$ et $\pi = 3,14$.
(b) Estimer l'incertitude sur T sachant que $\Delta\pi = 10^{-2}$, $\Delta\ell = 10^{-3}m$ et $\Delta g = 10^{-2}m/s^2$.

Example 5.9. Deux résistances R_1 et R_2, respectivement de 30Ω et 40Ω sont connues à $0,5\%$.
(a) Le montage en séries des résistances R_1 et R_2 fournit une résistance équivalente $R = R_1 + R_2$. Calculer R et estimer la précision du résultat.

(b) Reprendre la question précédente, lorsque les résistances sont montées en parallèle, sachant qu'alors $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$.

6. Fonctions Implicites

Un cercle $f(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ n'est pas le graphe d'une fonction mais localement il l'est (au fait l'hemisphère nord est le graphe de la fonction $y = \sqrt{1-x^2}$ alors que l'hemisphère sud est le graphe de la fonction $y = -\sqrt{1-x^2}$). L'idée est que si la jacobienne est non nulle en un point p, alors la fonction peut etre représentée comme un graphe autour de ce point. Plus precisemment

Theorem 6.1. *Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable et $P_0 = (x_0, y_0)$ un point tel que $f(x_0, y_0) = 0$. On suppose que $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en P_0 et que $\frac{\partial f}{\partial y}(P_0) \neq 0$, alors il existe $r > 0$ et un ouvert V voisinage de P_0 et une fonction $\phi :]x_0 - r, x_0 + r[\longrightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$f(x,y) = 0, (x,y) \in V \iff y = \phi(x), x \in]x_0 - r, x_0 + r[$$

De plus ϕ est dérivable sur $]x_0 - r, x_0 + r[$ de dérivée

$$\phi'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, \phi(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, \phi(x))}$$

7. Analyse Vectorielle

On retient simplement quelques formules. Soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $U \subset \mathbb{R}^3$. Définissons un opérateur (formel)

$$\nabla = \vec{e}_1 \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

On peut alors exprimer le gradient comme ∇ appliquée à f

$$\overrightarrow{f} = \nabla \cdot f = \vec{e}_1 \frac{\partial f}{\partial x} + \vec{e}_2 \frac{\partial f}{\partial y} + \vec{e}_3 \frac{\partial f}{\partial z}$$

Le gradient d'une fonction scalaire est donc un champ de vecteurs sur U. Si $\vec{F} = \nabla \psi$ alors on dira que ψ est un potentiel scalaire pour le champ de vecteurs $\vec{F}$.

On définit le rotationnel d'un champ de vecteurs $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (F_x, F_y, F_z)$, comme le produit vectoriel

$$\vec{R}ot\vec{F} = \nabla \times \vec{F} = \det \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{pmatrix}$$

Sous de bonnes conditions on a que

$$\boxed{\vec{R}ot\vec{F} = \vec{0} \ \Leftrightarrow \vec{F} = \nabla \psi}$$

Finalement on définit la divergence $div(\vec{F})$ d'un champ de vecteurs $\vec{F}(x,y,z) = F_x\vec{e}_1 + F_y\vec{e}_2 + F_z\vec{e}_3$ comme le produit scalaire

$$div(\vec{F}) = \nabla \cdot \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_x}{\partial y} + \frac{\partial F_x}{\partial z}$$

Exercice 7.1. *Montrer que le champ vectoriel $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ défini par*

$$\vec{F}(x,y,z) = (yz, zx, xy)$$

dérive d'un potentiel scalaire que vous déterminerez.

Exercice 7.2. *Ecrire* $\overrightarrow{grad}(\Psi) = \nabla\Psi$ *en coordonnées cylindriques (c'est à dire dans la base* $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$*, ou on rappelle* $(x, y, z) = (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$*,* $\vec{e}_r = \cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2$ *et que* $\vec{e}_\theta = -\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2$*.*
Indication: exprimer $\frac{\partial\Psi}{\partial x}, \frac{\partial\Psi}{\partial y}$ *en terme de* $\frac{\partial\Psi}{\partial r}$ *et* $\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}$*.*

Corrigés d'Exercices

Exo 1.1: Ici $a=(0,0)$, $\vec{v}=(1,1)$,t $t\vec{v}=(t,t)$ et donc
$$D_{\vec{v}}f(a)=\lim_{t\to 0}\frac{t^3/2t^2-0}{t}=\frac{1}{2}$$

Exo 1.2: Aux points (x,y) avec $x\neq 0$, la fonction est continue et différentiable autant de fois que l'on veut (car produit et composée de telles fonctions). Il reste donc à vérifier aux points de la forme $(0,a)$. D'après la définition
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,a)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,a)-f(0,a)}{x}=\lim_{x\to 0}x\cos(a/x)=0$$
et d'autre part
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,a)=\lim_{y\to a}\frac{f(0,y)-f(0,a)}{y-a}=\lim_{x\to 0}\frac{0}{y-a}=0$$
Les dérivées partielles premières existent bien et sont données par:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}2x\cos\frac{y}{x}+y\sin\frac{y}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$
et
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\begin{cases}-x\sin\frac{y}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$
Comme $\lim\limits_{x\to 0}x\cos(y/x)=0=\lim\limits_{y\to 0}y\sin(y/x)$ et que $\lim\limits_{x\to 0}y\sin(y/x)$ n'existe pas, on voit facilement que
$$\lim_{(x,y)\to(0,a)}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\begin{cases}\text{n'existe pas}, & si a\neq 0\\ 0, & si a=0\end{cases}$$
et que par contre $\lim\limits_{(x,y)\to(0,a)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=0$ pour tout $a\in\mathbf{R}$.

En conclusion: $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue sur $\{(0,a),a\in\mathbf{R}^*\}$, alors que $\frac{\partial f}{\partial y}$ est continue sur tout $\mathbf{R}^2$.

Exo 2.1: La fonction est différentiable sur $\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$ car quotient de fonctions différentiables. Il faut vérifier en $(0,0)$ Tout d'abord les derivées partielles en $(0,0)$:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}0=0$$
et également $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$. D'ou on peut calculer
$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-0-0-0}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}=\lim_{r\to 0}r(\cos^2\theta\sin^2\theta)=0$$
(après passage en coordonnées polaires $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$). La fonction est donc différentiable en 0 et par suite différentiable partout.
(b) Non cette fonction n'est pas différentiable en $(0,0)$ (verifiez).

Exo 2.2: (a) Produit, quotient et composée de fonctions continues.
(b) Il faut chercher $\lim_{(0,0)}f(x,y)$. On a
$$0\leq|f(x,y)|\leq|x+y|^n$$
Si $n\neq 0$, alors $|x+y|^n\longrightarrow 0$ et donc $|f(x,y)|\longrightarrow 0$ (gendarmes).

Si $n=0$, alors $f(x,y)=\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ n'admet pas de limite en $(0,0)$. On peut reécrire cette fonction en coordonnées polaires $f(r,\theta)=\sin\frac{1}{r}$ et bien sur $\lim_{r\to 0} f(r,\theta)$ n'existe pas.

(c) Soit

$$\epsilon(x,y)=\frac{f(x,y)-f(0,0)-x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Par définition, f est différentiable en $(0,0)$ si $\lim_{(0,0)}\epsilon(x,y)=0$. Il faut donc calculer les dérivées partielles en $(0,0)$. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=\lim_{x\to 0}x^{n-1}\sin\frac{1}{|x|}=\begin{cases}0, & n\geq 2\\ \text{n'existe pas}, & n=1\end{cases}$$

De même par symétrie pour $\frac{\partial f}{\partial y}$. Donc les dérivées partielles existent et sont nulles si $n\geq 2$. Auquel cas

$$\lim_{(0,0)}\epsilon(x,y)=\lim_{(0,0)}\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\lim_{(0,0)}\frac{(x+y)^n}{\sqrt{x^2+y^2}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=\lim_{r\to 0}r^{n-1}(\cos\theta+\sin\theta)\sin\frac{1}{r}$$

Cette dernière limite est nulle car $n\geq 2$.

En résumé la fonction est différentiable en $(0,0)$ si et seulement si $n\geq 2$.

Exo 2.6:

$$Jac(f)(x,y,z)=\begin{pmatrix}1 & 2y & 0\\ y^2z & 2xyz & xy^2\end{pmatrix}\quad,\quad Jac(g)(u,v)=\begin{pmatrix}2u & 1\\ v & u\\ 0 & e^v\end{pmatrix}$$

On trouve $Jac(g\circ f)$ soit en explicitant la composée

$$(g\circ f)(x,y,z)=((x+y^2)^2+xy^2z, xy^2z(x+y^2), e^{xy^2z})$$

et prenant la matrice jacobienne, soit en multipliant les deux matrices précédentes

$$\begin{aligned}Jac(g\circ f)(x,y,z) &= Jac(g)(f(x,y,z))\times Jac(f)(x,y,z)\\ &= \begin{pmatrix}2(x+y^2) & 1\\ xy^2z & x^2+y^2\\ 0 & e^{xy^2z}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2y & 0\\ y^2z & 2xyz & xy^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Exo 2.8: (a) Soit $f(x,y)=x^2y$. On cherche une approximation de $f(1,9992,3,0012)$. On sait calculer $f(2,3)=12$ et (c'etait voulu) le point $(1,9992,3,0012)$ est très proche de $(2,3)$. Une valeur approchée est donc donnée par

$$\begin{aligned}f(1,9992,3,0012) &\approx 12+-0,0008\frac{\partial f}{\partial x}(2,3)+0,0012\frac{\partial f}{\partial y}(2,3)\\ &= 12-0,0008\times 4\times 3+0,0012\times(2)^2\\ &= 11,9952\end{aligned}$$

(b) On pose $f(x,y)=e^x/y$ et la réponse est 1,3.

Exo 3.4: Une partie de cet exo a été traitée en TD. Tout d'abord donc on calcule le gradient de f

$$\overrightarrow{grad}(f)(a,b)=\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\vec{e}_1+\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\vec{e}_2=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{e}_1+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\vec{e}_2$$

et donc $D_{\vec{u}}(f)(a,b) = \dfrac{a\cos\theta + b\sin\theta}{\sqrt{a^2+b^2}}$. On peut donc étudier cette fonction de θ pour voir quand est-ce qu'elle atteint son maximum. Soit donc

$$D(\theta) = \frac{a\cos\theta + b\sin\theta}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Alors $D'(\theta) = 0$ lorsque $-a\sin\theta + b\cos\theta = 0$ ou bien $\tan\theta = \frac{b}{a}$ ce qui conduit à la solution pour θ

$$\cos\theta = a/\sqrt{a^2+b^2} \quad , \quad \sin\theta = b/\sqrt{a^2+b^2}$$

La dérivée directionnelle est donc maximum lorsque $\vec{u}$ est le vecteur unitaire dans la direction de (a,b) et qui correspond exactement au vecteur gradient. Ceci illustre (voir remarque 3.5) que le gradient pointe dans le sens de la plus grande variation.

Exo 3.7: On pose $f(x,y,z) = x\sin z - y\cos z$ et on calcule $\frac{\partial f}{\partial z} = x\cos z + y\sin z$, $\frac{\partial f}{\partial x} = \sin z$ $\frac{\partial f}{\partial y} = -\cos z$, ce qui donne l'équation

$$(x-1)\sin(\frac{\pi}{4}) - (y-1)\cos(\frac{\pi}{4}) + (z-\frac{\pi}{4})(\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}) = 0$$

c'est à dire : $x - y + 2z - \frac{\pi}{2} = 0$.

Exo 4.3: La fonction est C^1-différentiable. Il faut donc montrer qu'elle est bijective et que sa réciproque est différentiable. Ou encore on montre qu'elle est bijective et que le jacobien est partout non nul.
(i) Pour la bijection il faut montrer que pour tout $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, il *existe* (surjection) une paire *unique* (injection) $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ telle que $f(x,y) = (u,v)$. On regarde

$$\begin{cases} e^x - e^y = u \\ x + y = v \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y = v - x \\ e^x - e^{v-x} - u = 0 \end{cases}$$

Soit l'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto e^x + e^{v-x} - u$. On a que $g'(x) > 0$, $\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ et que $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$. Donc g est une bijection de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Il existe donc un unique $x \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = 0$. Il existe par suite un seul $y \in \mathbb{R}$ tel que $y = v - x$. La fonction ϕ est bien bijective.
(ii) On calcule le jacobien $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\det Jac(f)(x,y) = \det \begin{pmatrix} e^x & -e^y \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = e^x + e^y \neq 0$$

Il est bien $\neq 0$. En résumé ϕ est un C^1-difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$. Il s'ensuit que $Jac(\phi^{-1})(u,v) = Jac(\phi)(x,y)^{-1}$ (compléter).

Exo 4.8: (a) Nous avons $u = x, v = \frac{y}{x}$ pour $x > 0$ et $y \in \mathbb{R}$. On pose $F(u,v) = f(x,y)$ et donc

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial u} - \frac{y}{x^2}\frac{\partial F}{\partial v} \qquad , \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{x}\frac{\partial F}{\partial v}$$

Il s'ensuit que si f est solution de l'EDP (E): $x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, alors F est solution de $\frac{\partial F}{\partial u} = 0$. D'ou $F(u,v) = \phi(v)$ avec $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, et par suite $f(x,y) = \phi(\frac{y}{x})$.
(b) $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ avec $(r,\theta) \in]0,+\infty[\times[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Le changement de variables est donné par

$$\phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \quad , \quad (r,\theta) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

On notera $F = f \circ \phi$ avec $F(r,\theta) = f(x,y)$. On a donc

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r,\theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \cdot \frac{\partial x}{\partial r}(r,\theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \cdot \frac{\partial y}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial f}{\partial y}$$

On voit alors que f est solution de (E) si et seulement si $r\frac{\partial F}{\partial r} = 0$; c'est à dire si $F(r, \theta) = \psi(\theta)$ ou ψ de classe C^1 sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

On compare les deux solutions de (a) et (b): elles sont forcément les mêmes. La raison: $\theta = Arctan(\frac{y}{x})$ et donc on peut écrire $\phi(y/x) = \psi Arctan(\theta) = \psi(\theta)$.

Exo 7.1: On vérifie que $Rot(\vec{F}) = \vec{0}$ (faite le petit calcul) et donc $\vec{F}$ est un champ de gradient sur $\mathbb{R}^3$. Il existe bien une fonction différentiable $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ telle que

$$\vec{F} = \overrightarrow{grad} f = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}) = (yz, zx, xy)$$

En intégrant $\frac{\partial f}{\partial x} = yz$ par rapport à x en obtient $f(x, y, z) = xyz + \phi_1(y, z)$. En dérivant cette fonction par rapport à y on trouve $\frac{\partial f}{\partial y} = xz + \frac{\partial \phi_1}{\partial y}$ et donc obligatoirement $\frac{\partial \phi_1}{\partial y} = 0$ d'après nos équations, d'ou $\phi_1(y, z) = \phi_2(z)$ est uniquement fonction de z. Mais $\frac{\partial f}{\partial z} = xy$ ce qui donne que $\phi'(z) = 0$ et ϕ est une constante. Conclusion: $f(x, y, z) = xyz + C$.

Exo 7.2: Les formules de dérivées de fonctions composées donnent

$$\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} \quad , \quad \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} = \frac{\partial \Psi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial \Psi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

Comme $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, ceci se traduit par (en forme matricielle pour faire court et propre)

$$\begin{pmatrix} \partial\Psi/\partial r \\ \partial\Psi/\partial\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\Psi/\partial x \\ \partial\Psi/\partial y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\Psi/\partial x \\ \partial\Psi/\partial y \end{pmatrix}$$

et donc en prenant l'inverse de la matrice du milieu

$$\begin{pmatrix} \partial\Psi/\partial x \\ \partial\Psi/\partial y \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r\cos\theta & -\sin\theta \\ r\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial\Psi/\partial r \\ \partial\Psi/\partial\theta \end{pmatrix}$$

If s'ensuit que

$$\begin{aligned}
\nabla\Psi &= \frac{\partial\Psi}{\partial x}\vec{e}_1 + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\vec{e}_2 + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\vec{e}_3 \\
&= \frac{1}{r}\left[r\cos\theta\frac{\partial\Psi}{\partial r} - \sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right]\vec{e}_1 + \frac{1}{r}\left[r\sin\theta\frac{\partial\Psi}{\partial r} + \cos\theta\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\right]\vec{e}_2 + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\vec{e}_3 \\
&= \frac{\partial\Psi}{\partial r}(\cos\theta\vec{e}_1 + \sin\theta\vec{e}_2) + \frac{\partial\Psi}{\partial\theta}(-\sin\theta\vec{e}_1 + \cos\theta\vec{e}_2) + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\vec{e}_3 \\
&= \frac{\partial\Psi}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial\Psi}{\partial\theta}\vec{e}_\theta + \frac{\partial\Psi}{\partial z}\vec{e}_z \qquad \text{(on utilise la notation } \vec{e}_3 = \vec{e}_z\text{)}
\end{aligned}$$