Université Lille I
License Aménagée

Année 2010-2011

Interrogration Ecrite no. 3

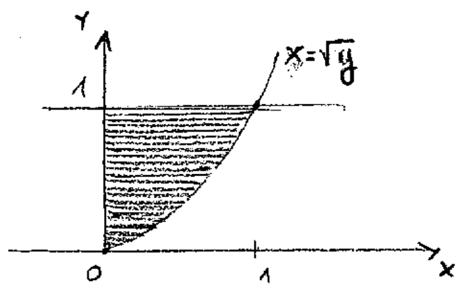
12 Mai 2011

Exercice 1 . Calculer les intégrales doubles suivantes :

$$\int_0^1 \int_0^1 (x+y)xy\,dy\,dx \quad , \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin(x+y)\,dx\,dy$$

Exercice 2 .
Soit R le triangle de sommets $(0,0), (0,2)$ et $(2,0)$. Calculez le volume du solide entre le plan $z = y$ et la région R.

Exercice 3 Calculer l'intégrale $\iint_R x^3 \sin y^3\,dx\,dy$ ou R est là région représentée ci-dessous



Exercice 4 .
Determinez la nature des séries suivantes (justifiez votre réponse)

$$\sum 3^n 4^{-n} \quad , \quad \sum \frac{1+n}{2+n}$$

Exercice 5 .
On considère la série $\sum \frac{1}{1+2^n}$. En comparant avec la série $\sum \frac{1}{2^n}$, expliquez pourquoi la première série doit converger.

Corrigé : Interro # 3

(License Aménagée - 18/05/2011)

Exo1 : Calculer les intégrales itérées :

1) $$\int_0^1\int_0^1 (x+y)xy\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\int_0^1 (x^2y+xy^2)\,dy \right] dx$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^2y^2}{2} + x\frac{y^3}{3} \right]_0^1 dx$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x}{3} \right) dx = \left[\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{6} \right]_0^1 = \frac{2}{6} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

2) $$\int_0^{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \sin(x+y)\,dx\,dy = \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\pi/2} \sin(x+y)\,dx \right] dy$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left[-\cos(x+y) \right]_0^{\pi/2} dy$$

← on remplace pour x

$$= \int_0^{\pi/2} \left[-\cos\left(y+\frac{\pi}{2}\right) + \cos y \right] dy$$

$$= \left[\sin y - \sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right) \right]_0^{\pi/2} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\pi - \sin 0 + \sin\frac{\pi}{2}$$

$$= 2\sin\frac{\pi}{2} = \boxed{2}$$

Exo2 :

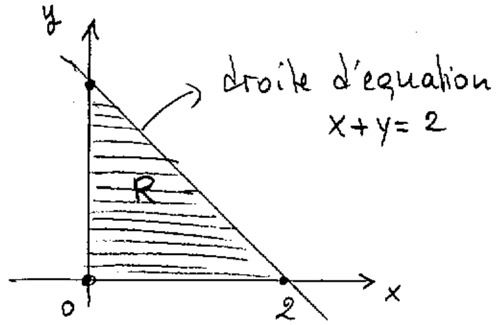
Soit R le triangle de sommets $(0,0)$, $(0,2)$ et $(2,0)$.

Calculez le volume du solide entre le plan $z=y$ et la région R.

Réponse :

$$V = \iint_R y\,dx\,dy = \iint_R y\,dy\,dx$$

[l'ordre des variables dans l'intégration n'affecte pas le résultat d'après Fubini]



Pour x fixé entre 0 et 2,
y varie entre 0 et $2-x$

R = triangle hachuré

$$= \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{array}{l} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2-x \end{array} \right\}$$

$$V = \int_0^2 \int_0^{2-x} y \, dy \, dx = \int_0^2 \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^{2-x} dx = \int_0^2 \frac{1}{2}(2-x)^2 \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{3}(2-x)^3 \right]_0^2 = \frac{1}{6} \cdot 2^3 = \boxed{\frac{4}{3}}$$

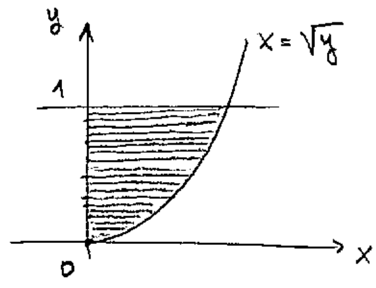
Pour ~~trouver~~ une primitive de $(2-x)^2$, qui est $-\frac{1}{3}(2-x)^3$, vous pouvez utiliser un changement de variables:

$$\int (2-x)^2 dx = \int u^2(-du) = \int -u^2 du = -\frac{u^3}{3} + c = -\frac{(2-x)^3}{3} + c$$

$u = (2-x) \Rightarrow du = -dx$

EXO 3 :

Calculer l'intégrale $\iint_R x^3 \sin(y^3)\, dx\, dy$ où R est la région représentée ci-dessous



Réponse :

$$I = \iint_R x^3 \sin(y^3)\, dx\, dy = \int_0^1 \int_0^{\sqrt{y}} x^3 \sin(y^3)\, dx\, dy = \int_0^1 \left[\frac{x^4}{4} \sin y^3 \right]_0^{\sqrt{y}} dy$$

$$\Rightarrow \quad I = \int_0^1 \frac{y^2}{4} \sin(y^3)\, dy \qquad \text{car } (\sqrt{y})^4 = (y^{1/2})^4 = y^2$$

$\Rightarrow \quad I = \frac{1}{4}\int_0^1 y^2 \sin(y^3)\,dy$

chang^t. de vars : on pose
$u = y^3 \Rightarrow du = 3y^2 dy$
$y = 0 \Rightarrow u = 0$
$y = 1 \Rightarrow u = 1$

d'où

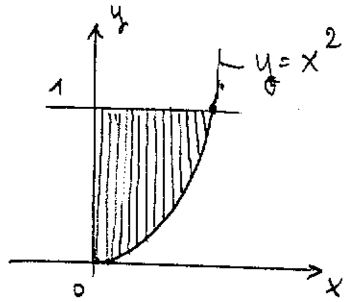
$$I = \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{3}\sin(u)\,du$$

$$= \frac{1}{12}\left[-\cos(u)\right]_0^1 = \frac{1}{12}(1-\cos 1)$$

Remarque : Si on avait essayé de calculer cette intégrale en $dydx$ on serait arrivé à une impasse !

En effet, on peut bien sûr écrire que

$$I = \int_0^1\int_0^{x^2} x^3 \sin(y^3)\,dy\,dx$$



mais

$$\int_0^{x^2} x^3 \sin y^3\,dy = x^3\int_0^{x^2}\sin y^3\,dy$$

et nous n'avons pas de primitive explicite pour $\sin y^3$!

Exo 4 :

Déterminer la nature des séries suivantes :

1) $$\sum_{n\geq 0} 3^n . 4^{-n} = \sum_{n\geq 0}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \dots$$

$$= \lim_{k\to 0}\left(1 + \frac{3}{4} + \dots + \left(\frac{3}{4}\right)^k\right)$$

$$= \lim_{k\to 0}\frac{1-(3/4)^{k+1}}{1-3/4} = \frac{1}{1-3/4} = \boxed{4}.$$

La série est géométrique et elle converge vers 4

2) $\sum_{n\geq 0} \frac{1+n}{2+n}$: on voit que le terme général $\frac{1+n}{2+n}$ ne converge pas vers 0 (il converge vers 1), et donc la série diverge (grossièrement).

Exo 5 :

Convergence de la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+2^n}$.

$$\frac{1}{1+2^n} < \frac{1}{2^n}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_0^k \frac{1}{1+2^n} < \sum_0^k \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$= \frac{1-\left(1/2\right)^{k+1}}{1-1/2} = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right]$$

La suite des termes S_k (somme partielle) vérifie

$$0 \leq S_k \leq 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}\right) \leq 2$$

Elle est croissante et majorée par 2

$\Rightarrow$ elle converge

$\Rightarrow$ donc par définition la série $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{1+2^n}$ converge.