DS 202 PC 17/11/07 CERDIVE

Exercice I.

(a). $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est différentiable en $(0,0)$ s'il existe
$\left\{ \begin{array}{l} c, d \text{ deux réels} \\ \varepsilon \text{ une } f^n\ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ tq } \varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0 \end{array} \right.$ tels que

$$f(x,y) = f(0,0) + cx + dy + \sqrt{x^2+y^2}\,\varepsilon\left(\sqrt{x^2+y^2}\right).$$

(b). $f : (x,y) \longmapsto (P(x,y) ; Q(x,y))$ P, Q Polynômes.
est différentiable en tout point de $\mathbb{R}^2$.

Exercice II.

(a). $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \underset{\text{Polaires}}{=} \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^2 \cos\theta \sin\theta}{r^2} = \lim\limits_{r\to 0} \cos\theta \sin\theta$

dépend de θ n'~~existe~~ pas

donc cette limite n'existe pas.

$\left(\begin{array}{l} \theta = 0 \to 0 \\ \theta = \frac{\pi}{4} \to \frac{1}{2} \end{array} \right)$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^3 \cos\theta \sin^2\theta}{r^2} = \lim\limits_{r\to 0} \underset{\to 0}{r} \Big[\underbrace{\cos\theta \sin^2\theta}_{\text{borné}}\Big] = 0.$

c). $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} h(x,y) = \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{e^{-\frac{1}{r^2}}}{r^2} = \lim\limits_{t\to+\infty} t\,\underbrace{e^{-t}}_{\text{emporte}} = 0$

Ex III 1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) \underset{\text{Polaires}}{=} \lim\limits_{r\to 0} \underset{\to 0 \text{ car } n \geq 1}{r^n} \underbrace{\sin^n\theta \cos(\ln r^2)}_{\text{borné}} = 0 = f(0,0)$

2). Si $(x,y) \neq (0,0)$ f est pdt, somme, composée etc.. de f^{ns} usuelles C^1 dont elle admet ds d_p qui se calculent en fixant une des variables et en dérivant par rapport à l'autre.

$(x,y) \neq (0,0)$ $\circ$ $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^n \cos(\ln(x^2+y^2)\right) = y^n \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(x^2+y^2)\right) \cdot \left(-\sin \ln(x^2+y^2)\right)$

$= -y^n \cdot \left(\frac{2x}{x^2+y^2} \right) \cdot \sin \ln(x^2+y^2)$.

$\circ$ $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = n y^{n-1} \cos \ln(x^2+y^2) + y^n \frac{2y}{x^2+y^2}\left(-\sin \ln (x^2+y^2)\right)$

Si $(x,y) = (0,0)$ $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ se calculent en reprenant la définition :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0 .$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k^n \cos(\ln k^2)}{k} = \lim_{k\to 0} k^{n-1} \cos(\ln k^2)$$

$= \nearrow 0$ si $n-1>0$ càd $n \geq 2$

$\searrow$ n'a pas de limite si $n=1$ car $\lim_{k\to 0} \cos(\underbrace{\ln k^2}_{\downarrow\, -\infty}) = \lim_{-\infty} \cos X$ n'existe pas

CL : si $n \geq 2$ f admet des dp sur $\mathbb{R}^2$

si $n=1$ ———— $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ n'existe pas en $(0,0)$.

3). Une CN de ~~exist~~ différentiabilité est l'existence de d.p donc
si $n=1$ f n'est pas diff en $(0,0)$ -

Si $n \geq 2$, f est C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ donc diff sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

En $(0,0)$: f diff en $(0,0)$ $\Longleftrightarrow$ $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-\left(f(0,0)+x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)+y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Calculons cette limite : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^n \cos \ln(x^2+y^2) - 0}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} \frac{r^n \sin^n\theta \cos(\ln r^2)}{r}$

$= \lim_{r\to 0} \underbrace{r^{n-1}}_{\to 0} (\underbrace{\sin^n\theta \cos \ln r^2}_{\text{borné}}) = 0$; donc f est diff en $(0,0)$ dès que $n \geq 2$.

4). Pb en $(0,0)$, pour $n \geq 2$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(-y^n \cdot \frac{2x}{x^2+y^2} \sin\left(\ln(x^2+y^2)\right) \right)$$

$$= \lim_{r\to 0} \left(\underbrace{-2r^{n-1}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\sin^n\theta \cos\theta \ \sin(\ln r^2)}_{\text{borné}} \right) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0).$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(n y^{n-1} \cos\left(\ln(x^2+y^2)\right) - \frac{2y^{n+1}}{x^2+y^2} \sin\left(\ln(x^2+y^2)\right) \right),$$

$$= \lim_{r\to 0} \left(n\, r^{n-1} \cos\left(\ln(x^2+y^2)\right) - 2r^{n-1} \sin(\quad) \right)$$

$$= \lim_{r\to 0} \underbrace{r^{n-1}}_{\to 0} \Big(\underbrace{n\cos(\quad) - 2\sin(\quad)}_{\text{borné}} \Big) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$$

Donc pour $n \geq 2$ $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$.

5). $n=3$ $\circ$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

$\circ$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(0,0)$

$$= \lim_{k\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,k) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{n k^{n-1} \cos \ln k^2 - \frac{2k^{n+1}}{k^2} \cdot \sin \ln}{k}$$

$$= \lim_{k\to 0} \underbrace{k^{n-2}}_{\to 0} \Big(\underbrace{n\cos\ln(k^2) - 2\sin\ln(k^2)}_{\text{BORNÉ}} \Big) = 0 \quad \text{car } n \geq 3.$$

6. L'équation du plan tg à $z = f(x,y)$ en $(0,1)$ est :

$$z - f(0,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,1)\,(x-0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,1)\,(y-1)$$

Càd $\boxed{z - 1 = n(y-1)}$ càd $\boxed{ny - z - n + 1 = 0}$

pour $n = 1$, on trouve

car

$f(0,1) = 1 \times \cos(\ln 1) = \cos 0 = 1$

$\frac{\partial f}{\partial x}(0,1) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y}(0,1) = n \cos \ln 1 \cancel{\,2 \sin(\ln 1)} = n$

Ex IV : $f(x,y) = g(u,v)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial g(u(x,y), v(x,y))}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(g(u(x,y), v(x,y))\right)$$

$$= \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) \cdot \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \cdot \frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

$$= \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) \cdot 1 + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) \cdot y$$

Cl : $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u} + y \frac{\partial g}{\partial v}}$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(g(u(\,), v(\,))\right) = \frac{\partial g}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial g}{\partial y} + x \frac{\partial g}{\partial v}}$$

On pourrait exprimer x et y ē fn de u et v, si on connaissant plus précisément les ouverts U et V.