Cours 7 - M202

Nous reprenons le critère sur la classification des points critiques et l'optimisation de fonctions de deux variables.

Ex : Etudier les points critiques de

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$$

Rép :

Un calcul donne 3 points critiques

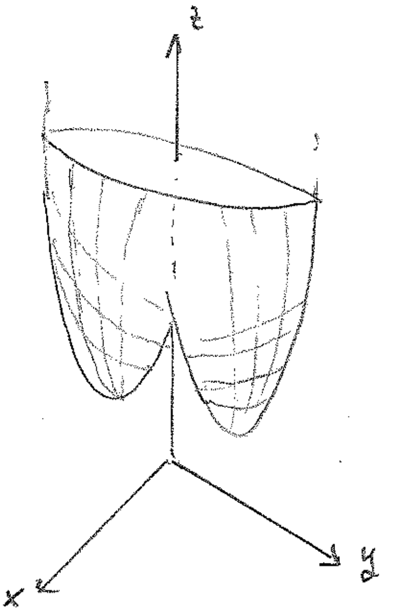
$(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$

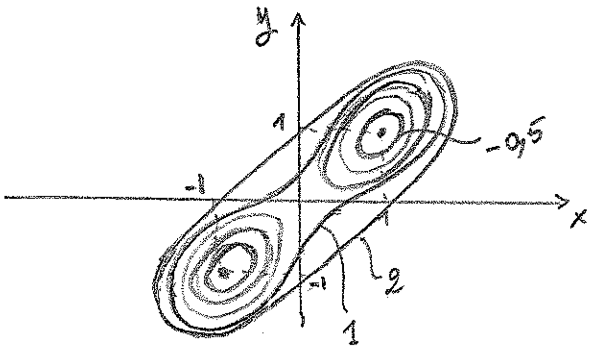
avec : $(0,0)$ point selle

$(1,1)$ min. local pour f

$(-1,1)$ " " " " "

Le graphe de f et les courbes de niveau sont représentées ci-joint





Exo : Parmi toutes les boites rectangulaires de volume fixé, trouver celles dont la paroi a une aire minimale.

Peut-on realiser une aire maximale ?

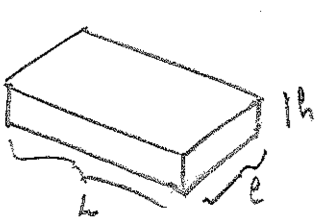
Rép :

Fixons V = volume $= 1$

L = longueur

l = largeur, h = hauteur

$V = Llh$



Aire $A = 2(Ll + Lh + lh) = 2\left(Ll + \frac{1}{L} + \frac{1}{l}\right)$

Le problème revient à minimiser

$$f(x,y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \quad ; \text{avec } x>0, y>0$$

Un seul point critique : $(1,1)$, $f(1,1) = 3$

Avec le test de la dérivée seconde, on vérifie que $(1,1)$ est un minimum local pour f, et donc (clairement) un minimum global.

Le cube est donc la boite de surface extérieure minimale ($L=l=h=1$)

<u>Théorème</u> : Si f est continue sur un ensemble borné fermé $D \subset \mathbb{R}^2$, alors f atteint un maximum absolu et un minimum absolu sur D

[Un ensemble D est dit fermé si son complémentaire $\mathbb{R}^2 - D$ est ouvert]

On appellera :

$\text{int} D = \{$points intérieurs de $D\}$

∂D = bord ou la frontière de D

$= \{$points de D qui ne sont pas intérieurs$\}$.

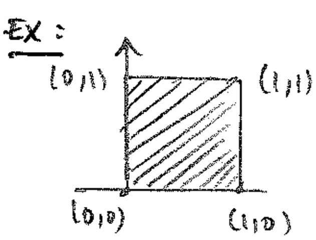
<u>Ex</u>:

D = disque plein $= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \leq 1\}$

$\text{int} D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < 1\}$

$\partial D = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 1\}$ = cercle unité

<u>Ex</u> :



D = carré plein

∂D = union des 4 côtés (carré extérieur)

<u>Test</u> : Pour maximiser une fonction sur un borné fermé D, il faut :

1) Calculer les valeurs de f aux points critiques dans $\text{int} D$

2) Calculer les valeurs extrêmes de f sur ∂D (frontière)

3) La plus grande [resp. petite] des valeurs obtenues dans 1) et 2) est le maximum [resp. min] global de f sur D.

Prob: Quels sont les extrema de $f(x,y) = x^2 - 2xy + 2y$ sur le rectangle plein

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 3 \,,\, 0 \leq y \leq 2\}$$

rép:

$$\text{int}\, D = \{(x,y) \mid 0 < x < 3 \,,\, 0 < y < 2\}$$

$$\partial D = \{(x,y) \mid x = 0 \text{ ou } x = 3 \text{ ou } y = 0 \text{ ou } y = 2\}$$

1) $\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y = 0 \\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial y} = -2x + 2 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$ un seul point critique $(1,1)$
$f(1,1) = 1$

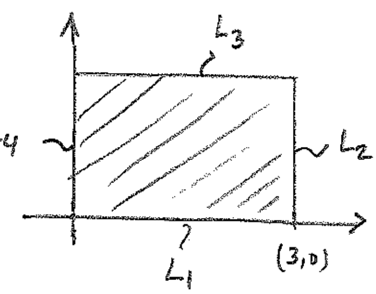
2) Examinons f sur son bord

$L_1 = \{(x,0) \,,\, 0 \leq x \leq 3\}$

$L_2 = \{(3,y) \,,\, 0 \leq y \leq 2\}$

$L_3 = \{(x,2) \,,\, 0 \leq x \leq 3\}$

$L_4 = \{(0,y) \,,\, 0 \leq y \leq 2\}$



Sur L_1 : $f(x,0) = x^2 \,,\, 0 \leq x \leq 3$

min en $(0,0)$, $f(0,0) = 0$

max en $(3,0)$, $f(3,0) = 9$

Sur L_2 : $f(3,y) = 9 - 4y \,,\, 0 \leq y \leq 2$

max $f(3,0) = 9$, min $f(3,2) = 1$

Sur L_3 : $f(x,2) = x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2 \,,\, 0 \leq x \leq 3$

min en $f(2,2) = 0$, max en $f(0,2) = 4$

Sur L_4 : $f(0,y) = 2y \,,\, 0 \leq y \leq 2$

min $f(0,0) = 0$, max $f(0,2) = 4$

Conclusion : Sur la frontière, le minimum de f vaut 0 et son maximum vaut 9

3) On compare : $\left.\begin{array}{l} f(1,1) = 1 \\ f(0,0) = f(2,2) = 0 \\ f(3,0) = 9 \end{array}\right\} \rightarrow$ min. absolu en $(0,0)$, $(2,2)$
max. absolu en $(3,0)$

C^1- Difféomorphismes et Théorème d'Inversion locale

Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ une fonction de plusieurs variables (un "champ" si $k > 1$)

avec $f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1 \dots x_n), \dots, f_k(x_1, \dots, x_n))$

ou chaque composante $f_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fct°. de n-vars

•) On dit que f est continue en $P_0 \in D_f$ si chaque f_i est cont. en P_0

•) On dit que f est C^1 sur D si chaque f_i est C^1 sur D

[en particulier toutes les DPP des f_i sont bien définies]

<u>Déf</u>: On apelle matrice Jacobienne de $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ au point P_0 la matrice

$$\mathrm{Jac}_f(P_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(P_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(P_0) \\ \vdots & & \\ \frac{\partial f_k}{\partial x_1}(P_0) & \dots & \frac{\partial f_k}{\partial x_n}(P_0) \end{bmatrix}$$

L'application linéaire induite par une telle matrice est appelée la differentielle de f en P_0 :

$$df(P_0) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k \;, \; \vec{v} \longmapsto \mathrm{Jac}_f(P_0)[\vec{v}].$$

<u>Déf</u>: Le determinant de $\mathrm{Jac}_f(P_0)$ est appelé Jacobien en P_0

<u>Ex</u>: $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$

$(x,y) \longmapsto \left(xy, \frac{x}{y}\right)$

$D_f = \mathbb{R}^2 - \{(x,0)\}$

$\mathrm{Jac}_f(x,y) = \begin{bmatrix} y & x \\ \frac{1}{y} & \frac{-x}{y^2} \end{bmatrix}$, $\det \mathrm{Jac}_f(x,y) = -\frac{2x}{y}$

On rappelle : $f : D \to E$ est bijective, si $\forall y \in E$, il existe un unique $x \in D$ tel que $f(x) = y$

Ex : Montrer que $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longmapsto (e^x - e^y, x+y)$$

est bijective

rép :

Pour $(u,v) \in \mathbb{R}^2$, on veut résoudre en $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ l'équation

$$f(x,y) = (u,v)$$

Si cette paire (x,y) existe et est unique, alors f bijective

$$f(x,y) = (u,v) \Rightarrow \begin{cases} e^x - e^y = u \\ x+y = v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = v - x \\ e^x - e^{v-x} = u \end{cases} \quad (*)$$

Soit l'application $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto e^x - e^{v-x} - u$$

alors g continue, strict $\nearrow$, $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$, $\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$

$\Rightarrow$ g est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ $g^{-1}(0)$ existe et est unique

$\Rightarrow$ $\exists !\, x$ tel que $e^x - e^{v-x} = u$

et donc $y = v - x$ existe et est unique aussi.

On peut résoudre le système $(*)$ d'une autre façon, plus explicite :

$$e^x - e^{v-x} = u \Rightarrow e^{2x} - ue^x - e^v = 0$$

$$\Delta = u^2 + 4e^v > 0 \quad , \quad e^x = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4e^v}}{2} > 0$$

d'où

$$\begin{cases} x = \ln\left(\dfrac{u + \sqrt{u^2 + 4e^v}}{2}\right) \\ y = v - x \end{cases}$$

<u>Def</u>: $f : D \to D'$ est un C^1-difféomorphism si

1) f est bijective de D dans D'
2) f est de classe C^1 sur D
3) f^{-1} (la réciproque de f) est également de classe C^1 sur D'

On dit aussi que f est un <u>changement de variable</u>

<u>Ex</u> : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longmapsto \left(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\right)$$

•) f est C^1 car chacune des composantes de f est C^1
•) f bijective d'inverse $f^{-1}(u,v) = (u+v, u-v)$
•) f^{-1} est C^1

d'où f est un changmt de var. (ou C^1-difféomorphisme).

<u>Ex</u> : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^3$$

$f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ n'est pas dérivable en 0

f est C^1 mais n'est pas un chgt de var.

<u>Ex</u> : $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x,y) \longmapsto (e^x - e^y, x+y)$$

Montrer que f est un C^1 difféomorphisme

<u>rép</u>: méthode "lourde" : calcul précédent montre que f^{-1} existe et

$$f^{-1}(u,v) = \left(\ln\left(\frac{u+\sqrt{u^2+4e^v}}{2}\right), \; v - \ln\left(\frac{u+\sqrt{u^2+4e^v}}{2}\right)\right)$$

est C^1 donc f est un difféo.

méthode "légère" : utiliser le théorème de l'inversion locale et conclure sans devoir calculer f^{-1} explicitement !