COURS VI – M202

On démontre une affirmation du cours précédent :

<u>Déf</u> : $D \subset \mathbb{R}^n$ sous ensemble. On dit que $a \in D$ est un point intérieur de D s'il existe une boule $B(a,r)$, $r>0$ contenue dans D.

On dit que D est ouvert dans $\mathbb{R}^n$ si tout point de D est un point intérieur.

<u>Proposition</u> : Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert, I intervalle de $\mathbb{R}$

$f : D \to \mathbb{R}$ de classe C^1, $\gamma : I \to D$ une courbe paramétrée

on écrira : $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$

Considérons la composée

$$g : I \xrightarrow{\gamma} D \xrightarrow{f} \mathbb{R}, \quad g(t) = f(\gamma(t)) = f(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$$

1) Si $\forall i$, γ_i est dérivable en t, alors g est dérivable en t, et

$$g'(t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)) \cdot \gamma_i'(t)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(\gamma(t)) \cdot \frac{d}{dt}\gamma_i(t)$$

2) γ_i de classe C^1 $\Rightarrow$ g est de classe C^1.

<u>Preuve</u> :

$n=2$ pour simplifier

Posons $x_0 = \gamma_1(t_0)$, $y_0 = \gamma_2(t_0)$, $g(t_0) = f(x_0, y_0)$

On écrit :

$$\gamma_1(t_0+h) = \gamma_1(t_0) + h\gamma_1'(t_0) + h\epsilon_1(h) \qquad \epsilon(h) \xrightarrow{h \to 0} 0$$

$$\gamma_2(t_0+h) = \gamma_2(t_0) + h\gamma_2'(t_0) + h\epsilon_2(h)$$

Ce qui donne

$$f(x_0+h ; y_0+k) = f(x_0 ; y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 ; y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$+ \|(h,k)\| \epsilon(h,k) \quad , \epsilon(h,k) \xrightarrow[(0,0)]{} 0$$

d'où :

$$g(t_0+h) = f(\gamma_1(t_0+h) , \gamma_2(t_0+h))$$

$$= g(t_0) + (h\gamma_1'(t_0) + h\epsilon_1(h)) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0 ; y_0)$$

$$+ (h\gamma_2'(t_0) + h\epsilon_2(h)) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

$$+ \|(h\gamma_1'(t_0) + h\epsilon_1 , h\gamma_2(t_0) + h\epsilon_2(h))\| \epsilon(-,-)$$

Calcul ...! on obtient

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(t_0+h) - g(t_0)}{h} = \gamma_1'(t_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \gamma_2'(0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

DÉRIVÉES PARTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR

EXTEMA DE FONCTIONS

Déf : On dit que f admet des dérivées partielles secondes (D.P.S) en (a,b) si les derivées partielles premières suivantes existent :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b) \quad \text{notée} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b) \quad \text{notée} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b) \quad \text{notée} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b) \quad \text{notée} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$

Si f admet des DPs en tout point de $D \subset \mathbb{R}^2$, alors on peut définir sur D les fonctions DPs

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} : D \to \mathbb{R}$$

Déf : On dit que f est de classe C^2 sur D si f admet des DPs qui sont continues sur D

- Comme pour le cas C^1, le produit, somme, quotient de fct° C^2 est encore C^2 [les polynômes sont C^2 ainsi que les fct° rationnelles là ou elles sont définies].
- f est C^2 sur $D \overset{\text{déf}}{\iff} f \in C^2(D)$

$$\Rightarrow f \in C^1(D)$$

$$\Rightarrow f \in C^0(D) = \{\text{fonctions continues sur } D\}$$

Ex : $f(x,y) = x^3 + x^2y^3 - 2y^2$

f est C^2 sur $\mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x + 2y^3 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6xy^2 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2y - 4$$

Théorème (Schwatz)

si $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sont continues ~~sur~~ en $a \in D_f$, alors elles sont égales en a

[En particulier si f est $\mathcal{C}^2$, alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a)$]

Problème :

Soit $f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (0,0) \end{cases}$

Sur quelles parties de $\mathbb{R}^2$ f est-elle $\mathcal{C}^1$? $\mathcal{C}^2$?

Réponse :

1) Sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ la fonction est $\mathcal{C}^2$ car rationnelle

2) Continuité en $(0,0)$: oui ✓

3) D.P.P en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0) - f(0,0)}{x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y \to 0} \frac{f(0,y) - f(0,0)}{y} = 0$$

4) Continuité des D.P.P en $(0,0)$

$(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y\left[(3x^2-y^2)(x^2+y^2) - 2x^2(x^2-y^2)\right]}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\underset{\text{polaire}}{=} r \sin\theta \left[3\cos^2\theta - \sin^2\theta - 2\cos^2\theta \cos 2\theta\right] \xrightarrow[r \to 0]{} 0$$

d'où

$$\lim_{(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} \text{ continue en } (0,0)$$

De même $\frac{\partial f}{\partial y}$ continue en $(0,0)$

5) Recherche des DPS en $(0,0)$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\partial f/\partial y\,(x,0) - \partial f/\partial y\,(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{x-0}{x} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\partial f/\partial x\,(0,y) - \partial f/\partial x\,(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{-y-0}{y} = -1$$

D'après le théorème de schwartz, f n'est pas C^2 en $(0,0)$

<u>Conclusion</u> : f admet des DPS en tout point de $\mathbb{R}^2$, mais f n'est pas C^2 en $(0,0)$.

Extrema :

$D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$, $f : D \to \mathbb{R}$

<u>Déf</u> : On dit que f admet un maximum (resp. minimum) <u>local</u> au point a s'il existe $r>0$ tel que $\forall x \in B(a,r) \cap D$

$$f(x) \leq f(a) \qquad [\text{resp. } f(x) \geq f(a)]$$

Ce maximum [ou minimum] est global si les inégalités sont vraies pour tout $x \in D$

<u>Ex</u> : $f(x,y) = x^2y^2$ admet un minimum global en $(0,0)$ sur $\mathbb{R}^2$

<u>Théorème</u> : Soit D un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $a \in D$, $f \in C^1(D)$

Si f admet un <u>extremum</u> local en a (c.à.d minimum ou maximum local), alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad , i = 1, 2, \ldots, n$$

<u>Déf</u> :

Un point $a \in D$ tel que toutes les DPP de f s'annulent en a

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0 \quad , \forall i$$

est appelé <u>point critique</u> de f.

Preuve : (théorème)

$n = 2$, $a = (a_1, a_2)$.

Si a est un extremum local pour f, alors a est un extremum local pour :

$$f_1(t) = f(t, a_2) \quad , \quad t \in]a_1 - r, a_1 + r[\ , \ (t, a_2) \in D$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow f_1'(a_1) = 0 \\ \text{or } f_1'(a_1) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2) \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a) = 0$$

De même pour $f_2(t) = f(a_1, t)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$.

$\boxtimes$

Attention:

La réciproque n'est pas vraie.

Soit $f(x,y) = xy$. Alors $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, mais $(0,0)$ n'est pas un extremum local pour f puisque :

$$f(\epsilon, \epsilon) = \epsilon^2 > 0 = f(0,0)$$
$$f(\epsilon, -\epsilon) = -\epsilon^2 < 0 = f(0,0) \qquad , \ \epsilon \neq 0 \ , \ \epsilon \text{ petit}.$$

Condition suffisante d'existence d'extrema:

Théorème B :
$$\left\{\begin{array}{l} f \text{ est } C^2 \text{ sur un voisinage de } (x_0, y_0) \\ (x_0, y_0) \text{ point critique de } f \\ r = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \quad , \quad s = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad , \quad t = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \\ \Delta = s^2 - rt \end{array}\right.$$

Alors

1) Si $\Delta < 0$, (x_0, y_0) est un extremum local de f :
   - $r > 0 \Rightarrow$ minimum local
   - $r < 0 \Rightarrow$ maximum local

2) $\Delta > 0$, (x_0, y_0) est appelé col ou point selle.
   Ce n'est pas un extremum.

Ex : Etudier les points critiques de

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

Rep :

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= 2x = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= 2y = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{1 seul point critique } (0,0)$$

d'autre part :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = 0$$

$$r = t = 2 \quad , s = 0 \quad , \Delta = -4 < 0$$

Comme $r = 2 > 0$, $(0,0)$ est un minimum local

[Bien sur, on sait qu'il est global et que $f \geq 0$ sur $\mathbb{R}^2$]

Ex : $f(x,y) = x^3 + 2x^2 + y^2 + y^3$

$$(x,y) \text{ critique } \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 4x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2y + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \text{ ou } x = -4/3 \\ \quad \text{et} \\ y = 0 \text{ ou } y = -2/3 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \text{4 points critiques} \\ (0,0) \ , (0,-2/3) \\ (-4/3, 0) \ , (-4/3, -2/3) \end{array}$$

Nature des points critiques :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 6x + 4 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + 6y$$

pt crit	r	s	t	Δ	nature
$(0,0)$	4	0	2	-8	min local
$(0,-2/3)$	4	0	-2	$+8$	point selle
$(-4/3,0)$	-4	0	2	$+8$	point selle
$(-4/3,-2/3)$	-4	0	-2	-8	max local

Démonstration du théorème B.

Nous avons besoin de savoir que si f est C^2 sur un ouvert $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$, alors f admet un DL d'ordre 2 au voisinage de a :
c'est à dire : $\exists$ fct° de $\mathbb{R}^n$, $\epsilon(h)$, avec $\epsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$
tel que $\forall h$, $a+h \in D$, $h = (h_1, \dots, h_n)$

$$f(a+h) = f(a) + \Sigma h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) + \|h\|^2 \epsilon(h)$$

Nous appelons ce DL également la formule de Taylor à l'ordre 2 en a :
Explicitons le cas $n = 2$, $a = (x_0, y_0)$, $x_1 = x$, $x_2 = y$

<u>Formule de Taylor : en (x_0, y_0) à l'ordre 2</u>.

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \underbrace{(x-x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y-y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)}_{\text{partie linéaire}}$$

$$+ \frac{1}{2}\left[(x-x_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2(x-x_0)(y-y_0)\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + (y-y_0)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a)\right]$$

$$+ \left(|x-x_0|^2 + |y-y_0|^2\right) \epsilon(x-x_0, y-y_0)$$

Pour revenir à la démo :

On pose $Q(h) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)$ "la partie Quadratique"

Si a est un point critique

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} Q(h) + \|h\|^2 \epsilon(h)$$

Pour h <u>petit</u>, $f(a+h) - f(a)$ est du même signe que $Q(h)$

Donc

$$\begin{cases} Q(h) > 0 & \Rightarrow a \text{ minimum local} \\ Q(h) < 0 & \Rightarrow a \text{ maximum local} \end{cases}$$

<u>$n = 2$</u> : $Q(h) = h_1^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) + 2h_1h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) + h_2^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a) = rh_1^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2$

si $s^2 - rt$, $\Rightarrow$ $rt > s^2$, $r \neq 0$

$Q(h) = r\left[h_1^2 + 2\frac{s}{r}h_1h_2 + \frac{t}{r}h_2^2\right] = r\left[\left(h_1 + \frac{s}{r}h_2\right)^2 + \frac{rt - s^2}{r^2}h_2^2\right]$ est du sgn <u>de r</u>