Cours III - M202

La définition de $\lim\limits_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ ne porte que sur la distance entre (x,y) et (a,b).

Elle ne doit pas dépendre de la direction d'approche.

Définition : (chemin du plan et limite)

On appelle chemin de $\mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$t \longmapsto (x(t), y(t))$$

avec $x \mapsto x(t)$ et $y \mapsto y(t)$ deux fonctions continues.

Posons $\gamma(0) = (a,b)$

On appelle limite de f au point (a,b), le long du chemin γ, la limite lorsqu'elle existe

$$\lim_{t\to 0} f(x(t), y(t)) = \lim_{t\to 0} f\circ\gamma(t)$$

Proposition 1 : Si $\lim f = l$

alors $\lim\limits_{\substack{(a,b)\\ \text{le long de } \gamma}} f = l$ pour tout chemin $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(0) = (a,b)$

Ceci est une conséquence de la propriété suivante

Théorème (fonction composée)

$f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions

- Supposons que f soit définie au voisinage de $A = (a,b)$ sauf peut-être en A, et $\lim\limits_{A} f = l$
- Supposons également que g soit définie au vois. de $l \in \mathbb{R}$, et $\lim\limits_{l} g = L$

Alors

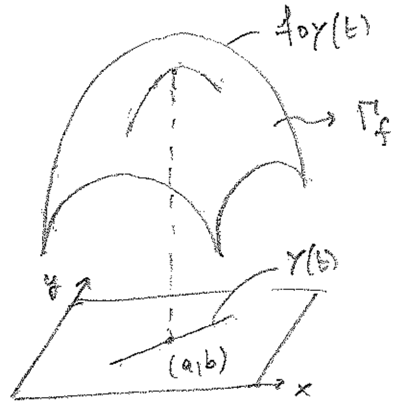
$g\circ f : (x,y) \longmapsto g(f(x,y))$ est définie au vois. de (a,b),

et $\lim\limits_{(a,b)} g\circ f = L$

__EX__ : $\phi(x,y) = \sin(x+y)$. $\lim\limits_{(0,0)} \phi$?

__Rép__ : $\left.\begin{array}{l} \phi : (x,y) \xmapsto{f} x+y \longmapsto \sin(x+y) \\ \lim\limits_{t\to 0} \sin t = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{(0,0)} \phi = 0$

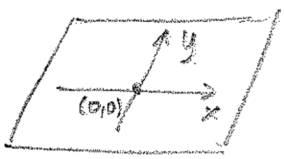
__Conséquence__ : Si on trouve deux chemins de $\mathbb{R}^2$ qui passent par $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que les limites de f en (a,b) le long de ces deux chemins soient distinctes, alors f n'a pas de limite au point (a,b)



__EX__ : Démontrer que

$$\lim_{(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \text{ n'existe pas}$$

__rép__ :



On peut tendre vers $(0,0)$ par des points de la forme $(t,0)$, c'est à dire le long de l'axe des x.

Prenons : $\gamma_1 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$\qquad t \longmapsto (t,0)$

le long de ce chemin

$$\lim_{t \xrightarrow{\gamma_1} 0} f = \lim_{t\to 0} f(t,0) = \lim_{t\to 0} \frac{t^2}{t^2} = 1$$

On peut également se rapprocher de $(0,0)$ le long de l'axe des y

Dans ce cas :

$\gamma_2 : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2$
$\qquad t \longmapsto (0,t)$
et $\lim\limits_{t \xrightarrow{\gamma_2} 0} f = \lim\limits_{t\to 0} f(0,t) = -\frac{t^2}{t^2} = -1$

__Conséquence__ : les deux limites étant différentes, $\lim\limits_{(0,0)} \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ n'existe pas.

__Remarque__ : si f en coordonnées polaires est de la forme $\phi(\theta)$ [c'est à dire elle ne dépend que de θ, et que f n'est pas constante], alors $\lim\limits_{(0,0)} f$ n'existe pas. Voir __EX__. précédent.

Ex : $\lim_{(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ existe t-elle ?

rép : •) $\gamma_1(t) = (t,0)$ chemin le long de l'axe des x

$\lim_{t \xrightarrow{\gamma_1} 0} f = \lim_{t\to 0} f(t,0) = 0$

•) $\gamma_2(t) = (0,t)$ (axe des y)

$\lim_{t \xrightarrow{\gamma_2} 0} f = \lim_{t\to 0} f(0,t) = 0$

•) choisissons un chemin le long de la droite $y=x$

$\gamma_3(t) = (t,t)$. Alors $\lim_{t \xrightarrow{\gamma_3} 0} f = \lim_{t\to 0} f(t,t) = \frac{1}{2}$!

Conséquence : la limite n'existe pas.
Pour que cette limite existe, il faut que la limite obtenue le long de n'importe quel chemin aboutissant à $(0,0)$ soit la même.

CONTINUITÉ

Définition : $f : D \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ définie au vois. de $A \in \mathbb{R}^n$

On dit que f est continue en $A = (a,b)$ si

$$\lim_{P\to A} f(P) = f(A)$$

On dit que f est continue sur D si f est continue en tout point de D.

Propriétés

1) Composée : $\mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^k \xrightarrow{g} \mathbb{R}^p$

f continue en A, g continue en $f(A)$, alors $g \circ f$ continue en A

2) Somme : $f, g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$ deux fonctions définies au vois. de A et continues en A, alors $f+g$ continue en A

3) le produit

Si $k=1$: les polynômes à n-variables sont continus

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2x_3 + x_2^2$$

•) le quotient $\frac{f}{g}$ de deux fonctions continues sur D est "au moins" continue sur $D \setminus \{$ les points où $g=0\}$

Ex : Etudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (0,0) \end{cases}$$

Rép :

En dehors de $(0,0)$, la fonction est continue étant somme et quotient de fct° continues.

En $(0,0)$, nous avons montré que $\lim\limits_{(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ n'existe pas !

Donc pas continue sur $\mathbb{R}^2$.

Ex : Etudier la continuité sur $\mathbb{R}^2$ de $g(x,y) = \begin{cases} e^{\left(xy + \frac{x^3-y^5}{x^2+y^4}\right)} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & (0,0) \end{cases}$

Rép :

•) g est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid x^2+y^4=0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme somme, produit, quotient et ensuite composée de fct° continues

•) en $(0,0)$: $\lim\limits_{(0,0)} \frac{x^3-y^5}{x^2+y^4} = 0$ [Polaires ou gendarmes]

d'ou

$$\lim_{(0,0)} \left(xy + \frac{x^3-y^5}{x^2+y^4}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{(0,0)} e^{(\quad)} = 1$$

Donc : f est bien continue en $(0,0)$ en donc sur tout $\mathbb{R}^2$

DÉRIVÉES PARTIELLES PREMIÈRES

L'ideé est de ramener étude des fct° plusieurs vars. à des problème concernant des fct° d'une seule var.

Définition : (fonctions partielles)

On appelle fct° partielle de f au point $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ les fonctions

$f_b : x \longmapsto f(x,b)$ "on fixe $y=b$, on varie x"

$f_a : y \longmapsto f(a,y)$ "on fixe $x=a$, on varie y"

Ces fonctions dépendent du point (a,b)

Remarque : le graphe de $f_b : x \to f(x,b)$ est la trace du graphe de f dans le plan vertical $y=b$

Définition : On appelle dérivée partielle première "D.P.P" de f au point $A \in D$ par rapport à :

- la variable x le nombre réel

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \lim_{x \to 0} \frac{f(a+x,b) - f(a,b)}{x} = f_b'(a)$$

- la variable y le nombre réel

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{y \to 0} \frac{f(a,b+y) - f(a,b)}{y} = f_a'(b)$$

Attention : L'expression "$\frac{\partial}{\partial x}$" est un symbole. Il signifie qu'on dérive suivant la variable x

Définition : Si f admet des D.P.P sur un domaine D, alors on peut définir les fonctions "dérivées partielles" :

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x,y) \in D \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} : (x,y) \longmapsto \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Définition : On dira qu'une fonction est de classe C^1 sur $D \subset \mathbb{R}^2$ si les D.P.P existent et son continues sur D. Eg: polynômes

Ex: Calculer les D.P.P de $f(x,y) = x^2 + 2xy$

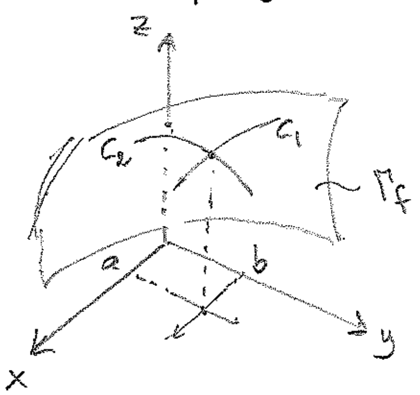
Rép: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ = prendre la derivée de x^2+2y^2 par rapport à x en traitant y comme une constante

$= 2x + 2y$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 2x$

Interprétation graphique

$z = f(x,y)$



$C_1 = \{y=b\} \cap \Gamma_f$ = trace de Γ graphe de f dans le plan $\{y=b\}$

$C_2 = \{x=a\} \cap \Gamma_f$ = trace de Γ dans le plan vertical $\{x=a\}$

Alors: $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ sont les pentes des droites tangentes en $(a,b,f(a,b))$ aux traces C_1 et C_2 respectivement

Exo:

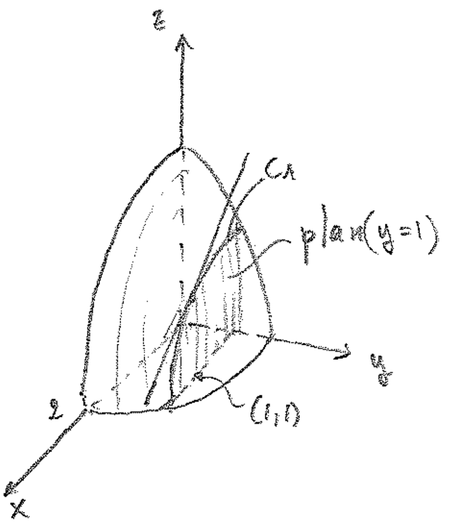
Soit $f(x,y) = 4 - x^2 - 2y^2$. Calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)$

Interpretez en tant que pentes.

Rép:

$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -2x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -2$

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -4y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -4$



graphe de f
= paraboloïde