Examen, Septembre 2009 **Durée : 3h**

Documents, calculatrices et téléphones interdits

Exercice I.

1. Donner les domaines de définition des fonctions suivantes :
   (a) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$,
   (b) $g(x,y) = \ln(xy)$.
2. Calculer les dérivées partielles premières sur $\mathbb{R}^2$ des fonctions suivantes :
   (a) $h(x,y) = \dfrac{1}{1+x^2+y^2}$,
   (b) $k(x,y) = y\cos(\sin x)$.

Exercice II.

1. Dire si les fonctions suivantes sont continues en $(0,0)$:
   (a) $f(x,y) = \tan(x+y)$,
   (b) $g(x,y) = |x|\sin y$
   (c) $h(x,y) = \dfrac{xy^2}{x^2+y^6}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $h(0,0) = 0$.
2. Ces fonctions possèdent-elles des dérivées partielles premières en $(0,0)$?
3. Ces fonctions sont elles différentiables en $(0,0)$?

Exercice III.
Soit $V =]0,+\infty[\times\mathbb{R}$ et $\phi : \mathbb{R}^2 \to V$ définie par $\phi(x,y) = (e^x, x+y)$.

1. Montrer que ϕ est un C^1-difféomorphisme et indiquer son application réciproque $\phi^{-1}(u,v)$.
2. On cherche les solutions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ de l'équation aux dérivées partielles

$$(1) \quad \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = e^x.$$

   On pose $f(x,y) = g(u,v)$ où $(u,v) = (e^x, x+y)$.
   (a) Trouver l'équation aux dérivées partielles (2) que vérifie g.
   (b) Résoudre l'équation (2) pour g et en déduire les solutions f de l'équation (1) .

Exercice IV.

1. Calculer l' intégrale $I_1 = \displaystyle\iint_D (xy)\, dxdy$, où $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2+y^2 \leq 2; 0 \leq y \leq x\}$.
   Représenter le domaine d'integration puis passer en coordonnées polaires.
2. Dessiner la portion plane $\Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq y^2; y \geq x^2\}$ puis calculer son aire.

Exercice V. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xe^y + x^3 - x$.

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de f sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les points critiques de f ainsi que leur nature.