Math 202 PC. Exercices 2010-2011

Partie II : Calcul intégral.

Feuille V : Intégrales multiples et itérées.

Construction générale avec sommes de Riemann en 2 variables, et propriétés. Intégrale double de $f \geq 0$ sur D interprétée comme volume du solide s'élevant verticalement au dessus de D et couvert par la portion de graphe de f. Intégration des fonctions continues, lien avec les intégrales itérées. Théorème de Fubini. Changement de variables. Passage en coordonnées polaires.

Exercice 1

1. a. Calculer $\iint_D x\cos(xy)dxdy$, $D = \{(x,y) | 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$.

   b. Calculer $\iint_R r^2 \cos\theta dr d\theta$, $R = \{(r,\theta) | 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\}$.
2. a. Calculer le volume délimité par le paraboloïde d'équation $2x^2 + y^2 + z = 9$, les trois plans coordonnées et les plans d'équations $x = 1$ et $y = 1$.

   b. Calculer le volume qui se trouve sous le plan d'équation $3x + 2y + z = 12$ et au dessus du rectangle $R = [0,1] \times [-2,3]$.
3. Calculer $\iint_R \sqrt{9 - y^2} dxdy$, $R = [0,4] \times [0,2]$, puis dessiner le solide dont le volume est représenté par cette intégrale.

Exercice 2

Dessiner le domaine D et donner les deux écritures du théorème de Fubini pour $I = \iint_D f(x,y) dx\, dy$, où :

a. D est le triangle de sommets $A(0,0)$, $B(1,0)$ et $C(1,1)$.

b. $D = \{(x,y) | 0 \leq x \leq 1, 1 \leq x + y \leq 4\}$.

c. D est la région délimitée par $y = x^2$ et la droite $y = x$.

Exercice 3 ([1])

Calculer le volume du solide :

a. Sous le paraboloide $z = x^2 + y^2$ et sur le domaine délimité par $y = x^2$ et $x = y^2$.

b. Sous la surface $z = xy$ et sur le triangle de sommets $(1,1)$, $(4,1)$ et $(1,2)$.

c. Borné par le cylindre $x^2 + y^2 = 1$ et les plans $y = z, x = 0, z = 0$ dans le premier octant.

Exercice 4

Soit $f(x,y)$ une fonction continue sur $[a,b] \times [c,d]$ et

$$g(x,y) = \int_a^x \int_c^y f(s,t) dt ds$$

pour $a < x < b, c < y < d$. Montrez que $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} = f(x,y)$.

1. *Réponses* : 3, a) $\frac{6}{35}$, 3,b) $\frac{31}{8}$, 3, c) $\frac{1}{3}$

Exercice 5

Calculer l' intégrale double $\iint_D f(x,y)dx\,dy$.

1. $f(x,y) = \frac{1}{(x^2+1)(y^2+1)}$, $D = \{(x,y)|0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x\}$.
2. $f(x,y) = e^{y^2}$, $D = \{(x,y)|0 \leq x \leq y \leq 1\}$.
3. $f(x,y) = x^2$, D est la région du premier quadrant délimitée par l'hyperbole $xy = 16$ et les droites $y = x$, $y = 0$ et $x = 8$.
4. $f(x,y) = xy^2$, D est le losange de sommets $A(0,0)$, $B(1,1)$, $C(0,2)$ et $D(-1,1)$.
5. $f(x,y) = y$, D est la région délimitée par $y = 0$, $y^2 = 4x$ et $y^2 = 5 - x$.
6. $f(x,y) = \frac{(x+y)^2}{x^2+y^2+1}$, $D = \{(x,y)|x^2 + y^2 \leq 1\}$.
7. $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2}$, $D = \{(x,y)|y \geq 0, x^2 + y^2 - x \geq 0, x^2 + y^2 - 2x \leq 0\}$.

Exercice 6

1. Calculer le volume du solide contenu dans la boule de centre $(0,0)$ et de rayon 4 et à l'extérieur du cylindre $x^2 + y^2 = 4$. (*Indication : figure et polaires*).
2. Calculer $\iint_D e^{\frac{x+y}{x-y}} dx\,dy$, où D est le trapèze de sommets $(1,0)$, $(2,0)$, $(0,-2)$ et $(0,-1)$, en utilisant le changement de variables : $(u = x + y, v = x - y)$.
3. Calculer $\iint_D xydx\,dy$, où D est la région du premier quadrant délimitée par les hyperboles $xy = 1$ et $xy = 3$ et les droites $y = x$ et $y = 3x$, en utilisant le changement de variables : $(x = \frac{u}{v}, y = v)$.

Exercice 7 ([2])

Calculer les intégrales doubles suivantes en utilisant le changement de variables indiqué :

a. $\iint_D e^{\frac{x^3+y^3}{xy}} dxdy$ avec $D = \{(x,y) \mid y^2 - 8x \leq 0, x^2 - 8y \leq 0\}$ et $\begin{cases} x = u^2 v \\ y = uv^2 \end{cases}$

b. $\iint_D xydxdy$ avec $D = \left\{(x,y) \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq 1\right\}$ et $\begin{cases} x = r\cos^3\theta \\ y = r\sin^3\theta \end{cases}$

2. *Réponses : 7, a) :* $\frac{1}{3}(e^8 - 1)^2$, *7, b) :* $\frac{1}{80}$