Math 202 PC - 2010/2011
Feuille d'Exercices III – *Calcul differentiel*

Dérivées partielles secondes, fonctions C^2, calcul d'extrema.

Exercice 1
Calculer, en chaque point de leur domaine de définition, les dérivées partielles de second ordre des fonctions :
a. $y \ln x$. **b.** $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$. **c.** $\dfrac{x-y}{x+y}$.

Exercice 2
Soit $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy + 1$
a. Ecrire la formule de Taylor au point $(0,0)$ à l'ordre 2 de f.
b. Déterminer les points critiques de f et leurs natures.

Exercice 3
On veut fabriquer une boite rectangulaire sans couvercle avec 12 m^2 de carton. Quel est le volume maximal réalisable pour une telle boite ?
(indication : trouvez une fonction volume à maximiser, et argumentez simplement que l'un des points critiques est forcément un point qui maximise le volume, sans passer par le test des DPS).

Exercice 4
Déterminer le minimum de la somme des carrés de n nombres réels dont la somme est égale à n.

Exercice 5
Soit f la fonction $f(x,y) = x^2 + y^2 - (x+y) + xy$, définie sur le triangle plein

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\right\}$$

Trouvez les extrema globaux de f sur D. En déduire que $f \leq 0$ sur D.
(On admettra que les points intérieurs sont dans $D_0 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, x+y < 1\right\}$, le reste étant la frontière de D.)

Exercice 6
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
$f(x,y) = \dfrac{y^4}{x^2+y^2}$, si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

a. Montrer que f est de clase C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

b. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ existent et sont égales.

c. Montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ ne sont pas continues en $(0,0)$

Exercice 7
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
$f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$, si $(x,y) \neq (0,0)$,
$f(0,0) = 0$.

a. Montrer que f est de clase C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

b. Montrer que f admet des dérivées partielles secondes croisées $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ sur $\mathbb{R}^2$ et montrer que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$; conclure.

Exercice 8
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
$f(x,y) = \dfrac{x^n y}{x^2+y^2}$, si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.
Discuter suivant les valeurs de l'entier positif n, l'appartenance de f aux classes $C^0(\mathbb{R}^2)$, $C^1(\mathbb{R}^2)$ et $C^2(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 5
On note $U := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y \neq 0\}$. Trouver toutes les applications $\phi : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telles que pour l'application $f : U \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \phi(x+y)$ et pour tout (x,y) dans U, on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{2f(x,y)}{(x+y)^2}$$