Contenu : Dérivées partielles du premier ordre et fonctions de classe C^1. Dérivée directionnelle. Equations de plans tangents. Accroissements finis et applications au calcul d'incertitudes.

Exercice 1

La hauteur des vagues h en haute mer dépend principalement de la force v du vent et la durée t pendant laquelle le vent souffle à cette vitesse. Des valeurs de la fonction $h = f(v,t)$ sont rassemblées dans la table ci contre.

(a) Quelle signification ont les dérivées partielles $\frac{\partial h}{\partial v}$ et $\frac{\partial h}{\partial t}$?

(b) Estimez $\frac{\partial f}{\partial v}(40,15)$ et $\frac{\partial f}{\partial t}(40,15)$.

Quelle est l'interprétation concrète de ces valeurs ?

(c) Quelle semble être la valeur de $\lim_{t\to\infty} \frac{\partial h}{\partial t}$?

Exercice 2

Montrer que la fonction de production de Cobb-Douglas ; $P = bL^\alpha K^\beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+^*$, satisfait à l'équation

$$L\frac{\partial P}{\partial L} + K\frac{\partial P}{\partial K} = (\alpha+\beta)P$$

Exercice 3

Calculer, en chaque point de leur domaine de définition, les dérivées partielles de premier ordre pour les fonctions suivantes.

a. $3^{x/y}$ **b.** $\cos(x^2+y)$ **c.** $\arctan \dfrac{y}{x^2}$ **e.** $y\sin(xz)$ **d.** $\dfrac{1}{\sqrt{1+x+y^2+z^2}}$

Exercice 4

Etudier la continuité, l'existence et la continuité des dérivées partielles des fonctions définies par :

a. $f(x,y) = \dfrac{x|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}$, si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

b. $f(x,y) = x^2y^2\ln(x^2+y^2)$, si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

c. $f(x,y) = (x+y)^p \sin(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}})$, si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$. Discuter suivant les valeurs de l'entier $p \in \mathbb{N}$.

d. $f(x,y) = y^2 \sin \dfrac{x}{y}$, si $y \neq 0$, $f(x,0) = 0$.

e. $f(x,y) = \dfrac{\sin(x^3+y^3)}{x^2+y^2}$, si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

f. $f(x,y) = \dfrac{x\sin y - y\sin x}{x^2+y^2}$, si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

Exercice 5

1. Calculer pour chacune des fonctions suivantes la dérivée directionnelle dans la direction donnée :

a. $\sin x + \cos y$ en $(0,0)$ dans la direction du vecteur $(\cos\theta, \sin\theta)$ avec $\theta = 0$, $\pi/6$ ou $\pi/3$.

b. $z^2 - x^2 - y^2$ en $(1,0,1)$ dans la direction du vecteur $(4,3,0)$.

c. $xyz - xy - yz - zx + x + y + z$ en $(2,2,1)$ dans la direction du vecteur $(2,2,0)$.

d. $xz^2 + y^2 + z^3$ en $(1,0,-1)$ dans la direction du vecteur $(2,1,0)$.

2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$f(x,y) = \dfrac{y^3}{\sqrt{x^2+y^4}}$, si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

a. Montrer que f est continue en $(0,0)$.

b. Montrer que pour tout vecteur $\overrightarrow{v}$ non nul de $\mathbb{R}^2$, la dérivée directionnelle de f en $(0,0)$ suivant $\overrightarrow{v}$ existe et la calculer.

Vérifier que la fonction $f(x,y) = (xy)^{1/3}$ est continue, que ses dérivées partielles $\partial_x f$, $\partial_y f$ existent à l'origine mais que la dérivée directionnelle n'existe dans aucune autre direction.

Exercice 7
a. Vérifier que $\sqrt{|xy|}$ n'est pas différentiable en $(0,0)$.
b. Etudier la différentiabilité des fonctions définies dans l'exercice 2.

Exercice 8
Trouver l'équation du plan tangent à la surface définie par $z = f(x,y)$ au point $A = (x_0, y_0)$ dans chacun des cas suivants.

a. $f(x,y) = 3x^2 + 4y^2$, $A = (0,1)$.

b. $f(x,y) = 2\cos(x-y) + 3\sin x$, $A = (\pi, \pi/2)$.

c. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, $A = (1,2)$.

Exercice 9
Soit (S) la surface d'équation : $z = x^2 + y^2 + x + y - xy = f(x,y)$.

a. Déterminer l'équation du plan tangent à (S) en $M_0 = (x_0, y_0, z_0)$.

B. Déterminer le point où le plan tangent à (S) est parallèle au plan $z = 0$. Etudier en ce point, la position de (S) par rapport à son plan tangent.

Exercice 10
Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^\alpha}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$, où α est un nombre réel. Pour quelles valeurs de α, la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}^2$ différentiable sur $\mathbb{R}^2$? de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 11
Etudier la différentiabilité en $(0,0)$ de la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{x^3y}{x^4+y^2}$ si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

Exercice 12
Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = \dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$, si $(x,y) \neq (0,0)$, $f(0,0) = 0$.

a. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.

b. Déterminer les dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$. La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$?

c. La fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est définie par $\phi(t) = (u(t), v(t))$, où $u(t) = t$ et $v(t) = -t$. Posons $F = f \circ \phi$. Calculer $F'(0)$ et $A = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)u'(0) + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)v'(0)$.

Exercice 13
Calculs d'incertitude

a. Donner une valeur approximative à la variation de $(x+y)/(x-y)$ lorsque x varie de $x = 2$ à $x = 2,5$ et y de 4 à $4,5$.

b. Donner une valeur approchée de $\ln((1,02)^{1/4} + (0,96)^{1/6} - 1)$ et de $e^{0,2}/0,9$.

c. Les longueurs x et y des deux côtés de l'angle droit d'un triangle rectangle sont connues avec une précision inférieure ou égale respectivement à h et k. Encadrer l'erreur avec laquelle sera calculée l'aire du triangle.

Exercice 14
La période T d'un pendule, exprimée en secondes, est donnée par la formule $T = 2\pi\sqrt{\ell/g}$ où ℓ est sa longueur exprimée en mètres et g l'accélération de la pesanteur en mètres pas seconde au carré.

a. Calculer T pour $\ell = 2m$, $g = 9,81m/s^2$ et $\pi = 3,14$.

b. Estimer l'incertitude sur T sachant que $\Delta\pi = 10^{-2}$, $\Delta\ell = 10^{-3}m$ et $\Delta g = 10^{-2}m/s^2$.

Exercice 15
Deux résistances R_1 et R_2, respectivement de 30Ω et 40Ω sont connues à $0,5\%$.

a. Le montage en séries des résistances R_1 et R_2 fournit une résistance équivalente $R = R_1 + R_2$. Calculer R et estimer la précision du résultat.

b. Reprendre la question précédente, lorsque les résistances sont montées en parallèle, sachant qu'alors $1/R = 1/R_1 + 1/R_2$.