Examen, le 25 Janvier 2008 à 8h, **Durée : 3h**

Documents, calculatrices et téléphones interdits

Exercice I. (sur 4 points) On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{y^4 - x^3 - xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0); \quad \text{et } f(0,0) = 0.$$

(a) Montrer que f est continue en $(0,0)$.

(b) Etudier la différentiabilité de f en $(0,0)$.

(c) Est-ce que f est de classe C^1 dans un voisinage de $(0,0)$?

Exercice II. (6 points)

1. Soit ω la forme différentielle définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$\omega = (e^y y\cos(xy))\,dx + e^y\,(1 + xcos(xy) - \sin(xy))\,dy$$

   (a) Montrer que ω est exacte sur $\mathbf{R}^2$.

   (b) Déterminer les fonctions f telles que $\omega = df$.

   (c) Donner la valeur de $\int_{\mathcal{C}^+} \omega$ où $\mathcal{C}^+$ est le cercle unité de $\mathbf{R}^2$ orienté dans le sens trigonométrique.

2. (a) Enoncer le théorème de Green-Riemann.

   (b) Utiliser le théorème de Green-Riemann pour calculer l'intégrale curviligne suivante :

$$\int_{\mathcal{C}^+} y\cos x dx + (x + \sin x)dy$$

   où $\mathcal{C}^+$ est le cercle $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 = 4\}$ orienté dans le sens trigonométrique.

Exercice III. (10 points)

1. Montrer que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta d\theta = \frac{\pi}{4}$.

2. On pose pour $a > 0$, $D_a = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x^2+y^2 \leq a^2\}$. Calculer $\displaystyle\iint_{D_a} x^2y^2dxdy$.

3. Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$. Calculer $\displaystyle\iiint_D x^2y^2z^2dxdydz$

   a) En utilisant le théorème de Fubini pour D simple par rapport à z;

   b) En utilisant les coordonnées sphériques.

4. Soit S la surface $S = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | z = \frac{1}{2}(x^2+y^2),\ x^2+y^2 \leq 1\}$. Calculer l'intégrale de surface $\displaystyle\iint_S \frac{x^2y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}} d\sigma$

   a) En utilisant le paramétrage

$$\Phi : (x,y) \to \left(x, y, \frac{1}{2}(x^2+y^2)\right),\ (x,y) \in \{(x,y) | x^2+y^2 \leq 1\}.$$

   b) En utilisant le paramétrage

$$\Psi : (r,\theta) \to \left(r\cos\theta, r\sin\theta, \frac{1}{2}r^2\right),\ (r,\theta) \in \{(r,\theta) | r \in [0,1],\ \theta \in [-\pi,\pi]\}.$$