Exercice I.

(a). $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y^4-x^3-xy^2}{x^2+y^2}$; par majoration :

on a $\begin{cases} x^2+y^2 \geqslant x^2 \geqslant 0 \\ x^2+y^2 \geqslant y^2 \geqslant 0 \end{cases}$ donc

$$0 \leqslant |f(x,y)| \leqslant \left|\frac{y^4}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{x^3}{x^2+y^2}\right| + \left|\frac{xy^2}{x^2+y^2}\right|$$

$$\leqslant \left|\frac{y^4}{y^2}\right| + \left|\frac{x^3}{x^2}\right| + \left|\frac{xy^2}{y^2}\right| = y^2+|x|+|x| \longrightarrow 0$$

Par la règle des gendarmes on a $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ donc f est continue en $(0,0)$.

Rq : on peut aussi utiliser le passage en polaires.

(b). . Calcul des dérivées partielles de f en $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) := \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} -\frac{x^3}{x^2 \cdot x} = -1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) := \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{y^4}{y^2 y} = 0$$

. Vérification de la différentiabilité en $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)-f(0,0)-x\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-y\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4-x^3-xy^2+x(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot(x^2+y^2)}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^4}{(x^2+y^2)^{3/2}} \underset{\text{POLAIRES}}{=} \lim_{r\to 0} \frac{r^4\sin^4\theta}{r^3} = \lim_{r\to 0} \underbrace{r}_{\downarrow\, 0} \cdot \underbrace{\sin^4\theta}_{\text{borné}} = 0$$

par gendarmes

CL : f est différentiable en $(0,0)$.

(c). Calcul des dérivées partielles pour $(x,y) \neq (0,0)$

. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{(-3x^2-y^2)(x^2+y^2) - 2x(y^4-x^3-xy^2)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{-x^4-2x^2y^2-y^4-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$

. $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{(4y^3-2xy)(x^2+y^2) - 2y(y^4-x^3-xy^2)}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{4x^2y^3+y^5}{(x^2+y^2)^2}$

. Calcul des limites en $(0,0)$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = ?$ on voit des termes en x^4, y^4

$= -1$

$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) \underset{\text{POLAIRES}}{=} \lim\limits_{r\to 0} \dfrac{r^5(4\cos^2\theta\sin^3\theta + 2\sin^5\theta)}{r^4} = \lim\limits_{r\to 0} \underset{\downarrow\, 0}{r} . \underbrace{(4\cos^2\theta\sin^3\theta + 2\sin^5\theta)}_{\text{borné}}$

$= 0$

CL : f est C^1 au voisinage de $(0,0)$

Exercice III

1. $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta \, d\theta \overset{\boxed{\sin^2\theta = 1-\cos^2\theta}}{=} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos^2\theta - \cos^4\theta)\, d\theta = \frac{1}{8}\int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos 4\theta)\, d\theta$

LINÉARISATION :

$\cos^2\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}(e^{2i\theta}+2+e^{-2i\theta}) = \dfrac{\cos 2\theta + 1}{2}$

$\cos^4\theta = \left(\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{2^4}(e^{i4\theta} + 4e^{i2\theta} + 6 + 4e^{-i2\theta} + e^{-i4\theta}) = \dfrac{\cos 4\theta + 3}{8} + \dfrac{\cos 2\theta}{2}$

$= \dfrac{1}{8}\left[\theta - \dfrac{\sin 4\theta}{4}\right]_{-\pi}^{\pi} = \boxed{\dfrac{\pi}{4}}$

2. $\displaystyle\iint_{D_a} (x^2y^2)\, dx\, dy \underset{\text{POLAIRES}}{=} \int_0^{2\pi}\left(\int_0^a (r^4\cos^2\theta\sin^2\theta)\, r\, dr\right) d\theta = \int_0^{2\pi} \cos^2\theta\sin^2\theta \frac{a^6}{6}\, d\theta$

$= \boxed{\dfrac{\pi a^6}{24}}$.