MATH 202 B Janvier 2007. (1)

Exercice 1 a). Cf cours

b) - (i) f est continue (C^∞) sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0,0\}$ car est une fraction rationnelle dont le dénominateur est non nul sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

En $(0,0)$: ... $x^2+y^2 \geqslant x^2 \geqslant 0$ donc $0 \leqslant \left|\dfrac{x^3y^n}{x^2+y^2}\right| \leqslant \left|\dfrac{x^3y^n}{x^2}\right| = |x||y|^n \underset{(x,y)\to(0,0)}{\longrightarrow} 0$

D'après la règle des gendarmes $\lim\limits_{(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$ et f est continue en $(0,0)$ donc sur $\mathbb{R}^2$, pour tout $n \geqslant 0$.

(ii). Calculons les dérivées partielles de f en $(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} x \cdot [y^n]_{|y=0} = \begin{cases} 0 \text{ si } n \geqslant 1 \\ 1 \text{ si } n = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{f(0,y)-f(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0}{y} = 0$$

Calculons $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{f(x,y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\times x - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\times y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3y^n}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} \underset{\text{Polaires}}{=} \lim_{r\to 0} \frac{r^{3+n}\cos^3\theta\sin^n\theta}{r^3} = \lim_{r\to 0} r^n \underbrace{\cos^3\theta\sin^n\theta}_{\text{borné}}$$

$= 0$ si $n \geqslant 1$ par gendarmes.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3 - x(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-xy^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} -\frac{r^3\cos\theta\sin^2\theta}{r^3} \text{ n'existe pas.}$$

CL: f est différentiable en $(0,0)$ ssi $n \geqslant 1$.

On a déjà vu que f est C^∞ donc différentiable sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par conséquent f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ ssi $n \geqslant 1$.

(iii). pour $(x,y) \neq (0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{3x^2y^n(x^2+y^2) - 2x(x^3y^n)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{3x^4y^n + 3x^2y^{n+2} - 2x^4y^n}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^4y^n + 3x^2y^{n+2}}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{nx^3y^{n-1}(x^2+y^2) - 2y(x^3y^n)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{nx^5y^{n-1} + nx^3y^{n+1} - 2x^3y^{n+1}}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{nx^5y^{n-1} + (n-2)x^3y^{n+1}}{(x^2+y^2)^2}$$

- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{r\to 0} \frac{r^{n+4}(\cos^4\theta \sin^n\theta + 3\cos^2\theta \sin^{n+2}\theta)}{r^4}$

$$= \lim_{r\to 0} \underset{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ pour } n\geq 1}}{r^n} \underbrace{(\cos^4\theta \sin^n\theta + 3\cos^2\theta \sin^{n+2}\theta)}_{\text{borné}} = 0 \text{ par gendarmes} = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$$

- $\displaystyle \lim_{(x,y)\to 0} \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{r\to 0} \frac{r^{n+4}(n\cos^5\theta \sin^{n-1}\theta + (n-2)\cos^3\theta \sin^{n+1}\theta)}{r^4}$

$$= \lim_{r\to 0} \underset{\substack{\downarrow \\ 0 \text{ pour } n\geq 1}}{r^n} \underbrace{(n\cos^5\theta \sin^{n-1}\theta + (n-2)\cos^3\theta \sin^{n+1}\theta)}_{\text{borné pour } n\geq 1}$$

$= 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$, par la règle des gendarmes

CL: on a déjà vu f C^1 sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ donc f est C^1 sur $\mathbb{R}$ ssi $n\geq 1$.

(iv). $\boxed{n=1}$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^5}{x^4}}{x} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0} \frac{0-0}{y} = 0$$

La fonction f n'est pas de classe C^2 en $(0,0)$ (donc sur $\mathbb{R}^2$) car sinon $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) \neq \dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ contredirait le Théorème de Schwarz -

Exercice 4

(a) et (b) : Cf Juin 2008.

c). on a $(u,v) = \varphi(x,y)$

La formule de changement de variables pour φ s'écrit :

$$\iint_{\varphi(D)} g(u,v)\, du\, dv = \iint_D g(xy, x+y)\, |\det \mathrm{Jac}\,\varphi(x,y)|\, dx\, dy$$

or $\det \mathrm{Jac}\,\varphi(x,y) = \left| \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} y & x \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (y-x)$

or $y-x \geq 0$ sur U donc $|y-x| = y-x$

d'autre part $\varphi(D) = \{ (u,v) \in V : 0 \leq v \leq 1 ; -\pi \leq u \leq -\frac{\pi}{2} \}$

$= [-\pi, -\pi/2] \times [0,1]$

Par conséquent $\displaystyle\iint_D \overbrace{(x+y)}^{v} \overbrace{\cos(xy)}^{u} \underbrace{(y-x)\, dx\, dy}_{du\, dv} = \iint_{[-\pi,\pi/2]\times[0,1]} v \cos u \, du\, dv$

$= \left[\sin u \right]_{-\pi}^{-\pi/2} = -1$

e