Méthodes analytiques pour l'étude du brownien fractionnaire

<u>PLAN:</u>

1. *Brownien fractionnaire et chemins rugueux*
2. *Méthodes analytiques*
3. *1ère application: convergence/divergence de l'aire de Lévy*
4. *2ème application : théorème central limite pour l'aire de Lévy renormalisée ($\alpha < 1/4$)*
5. *3ème application : E.d.s. dirigées par un bruit fractionnaire complexe d'indice quelconque*

1 Brownien fractionnaire et chemins rugueux

Définition du brownien fractionnaire

Processus B_t^α *ou* B_t*,* $t \in \mathbb{R}$*, gaussien centré, de fonction de covariance* $K(s,t) = \frac{1}{2}(|s|^{2\alpha} + |t|^{2\alpha} - |t-s|^{2\alpha})$*.*

(Cas particulier : $\alpha = 1/2$: Brownien usuel.)

<u>Propriétés:</u>

(i) autosimilarité: $(B_{\lambda t}, t \in \mathbb{R}) \stackrel{(d)}{=} (\lambda^\alpha B_t, t \in \mathbb{R})$;

(ii) accroissements stationnaires: $(B_{t+a} - B_{s+a}; s,t \in \mathbb{R}) \stackrel{(d)}{=} (B_t - B_s; s,t \in \mathbb{R})$.

Les trajectoires sont p.s. $(\alpha - \varepsilon)$-Hölder $\forall \varepsilon > 0$ ou encore à q-variation bornée $\forall q > 1/\alpha$.

<u>Cas multidimensionnel</u>

$B_t = (B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)})$, d composantes i.i.d.

Question générale:

Comment construire un calcul stochastique/résoudre des équations différentielles stochastiques dirigées par un bruit fractionnaire ?

Méthode des chemins rugueux "rough paths" (T. Lyons, 1998)

Hypothèses: soit $\Gamma_t = (\Gamma_t^{(1)}, \ldots, \Gamma_t^{(d)})$ un chemin à q-variation bornée ($q > 1$) qui se *relève* en une fonctionnelle multiplicative $(\mathbf{\Gamma}^1, \ldots \mathbf{\Gamma}^{\lfloor q \rfloor})$:

$$\mathbf{\Gamma}^1_{st}(i_1) = \Gamma_t^{(i_1)} - \Gamma_s^{(i_1)};$$

$$\mathbf{\Gamma}^2_{st}(i_1, i_2) = \text{ ''} \int_s^t d\Gamma_{t_1}^{(i_1)} \int_s^{t_1} d\Gamma_{t_2}^{(i_2)} \text{ ''}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

avec deux propriétés:

(i) $\mathbf{\Gamma}^k_{st}(i_1, \ldots, i_k)$ ($k \leq \lfloor q \rfloor$) est à q/k-variation bornée;

(ii)

$$\begin{aligned} \mathbf{\Gamma}^k_{s,t}(i_1, \ldots, i_k) &= \mathbf{\Gamma}^k_{s,u}(i_1, \ldots, i_k) + \mathbf{\Gamma}^k_{u,t}(i_1, \ldots, i_k) \\ &+ \sum_{k_1+k_2=k} \mathbf{\Gamma}^{k_1}_{s,u}(i_1, \ldots, i_{k_1}) \mathbf{\Gamma}^{k_2}_{u,t}(i_{k_1+1}, \ldots, i_k). \end{aligned} \tag{1.1}$$

Alors on peut définir $\int \sigma_1(\Gamma_s) d\Gamma_s^{(1)} + \ldots + \sigma_d(\Gamma_s) d\Gamma_s^{(d)}$ et résoudre $dY_t = V(Y_t, t)dt + \sum_i \sigma_i(Y_t, t) d\Gamma_t^{(i)}$.

Application au brownien fractionnaire:

Hypothèse 1: $\alpha > 1/4$.
Alors l'aire de Lévy

$$\mathcal{A}_{st}(\eta) = \int_s^t B_{t_1}^{CQ(1)}(\eta) \int_s^{t_1} B_{t_2}^{CQ(2)}(\eta)$$

converge quand $\eta \to 0$
$\Longrightarrow$ calcul stochastique et résolution d'e.d.s.

Hypothèse 2: $\alpha < 1/4$.
Alors $\mathbb{E}[\mathcal{A}_{st}(\eta)^2] \to_{\eta \to 0} \infty$.

2 Méthodes analytiques

Idée générale: B_t=valeur au bord d'un processus gaussien analytique sur $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$.

Définition: Soit Γ'_z, $\mathrm{Im}\, z>0$ le processus gaussien à trajectoires analytiques défini par

$$\Gamma'_z=\sum_{k\geq 0} f_k(z)\xi_k,\ f_k(z)=C_\alpha\sqrt{\frac{\Gamma(2-2\alpha+k)}{k!}}\left(\frac{z+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}}\right)^{2\alpha-2}\left(\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)^k.$$

Propriétés:

(i) $\mathbb{E}[\Gamma'(z)\Gamma'(w)]=0$;

(ii) $K^{',-}(z,\bar{w}):=\mathbb{E}[\Gamma'(z)\overline{\Gamma'(w)}]=\frac{\alpha(1-2\alpha)}{2\cos\pi\alpha}(-\mathrm{i}(z-\bar{w}))^{2\alpha-2}$.

On peut intégrer: $\Gamma_z:=\int_0^z\Gamma'_\zeta\, d\zeta$, $\mathrm{Im}\,\zeta\geq 0$. On trouve:

(i) $B_t:=2\mathrm{Re}\ \Gamma_t$ est un brownien fractionnaire;

(ii) $B_t(\eta):=2\mathrm{Re}\ \Gamma_{t+\mathrm{i}\eta}$ $(\eta>0)$, de noyau de covariance $K(\eta)=2\mathrm{Re}\ K^{\pm}(\eta)$,

$$K^{\pm}(\eta;x,y)=\frac{1}{4\cos\pi\alpha}\left[(\pm\mathrm{i}x+\eta)^{2\alpha}+(\mp\mathrm{i}y+\eta)^{2\alpha}-(\pm\mathrm{i}(x-y)+\eta)^{2\alpha}\right],$$

est un processus régulier convergeant p.s. vers B_t.

Pour la suite:
Noyau de covariance de $B'_t(\eta) := \Gamma'(t+\mathrm{i}\eta)+\overline{\Gamma'(t+\mathrm{i}\eta)}$:

$$K'(\eta;x,y) := c_\alpha\left((-\mathrm{i}(x-y)+\eta)^{2\alpha-2}+(\mathrm{i}(x-y)+\eta)^{2\alpha-2}\right).$$

3 1e application: convergence/divergence de l'aire de Lévy

Définition: Soit

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{0,t}(\eta) &:= \int_0^t dB_{t_1}^{(1)}(\eta) \int_0^{t_1} dB_{t_2}^{(2)}(\eta) \\ &= \int_0^t \left(\Gamma'^{(1)}(t_1 + \mathrm{i}\eta) + \overline{\Gamma'^{(1)}(t_1 + \mathrm{i}\eta)}\right) dt_1 \int \ldots \end{aligned}$$

On trouve

$$\mathbb{E}[(\mathcal{A}_{0,t}(\eta))^2] = C(\mathcal{V}_-(\eta) + \mathcal{V}_+(\eta)),$$

$$\mathcal{V}_\pm(\eta) := \int_0^t dx_1 \int_0^{x_1} dx_2 \int_0^t dy_1 \int_0^{y_1} dy_2 (-\mathrm{i}(x_1 - y_1) + \eta)^{2\alpha-2} (\pm \mathrm{i}(x_2 - y_2) + \eta)^{2\alpha-2}$$

qui se ramènent à:

Définition: $I_\pm(\beta_1, \beta_2; 0, t)(a, b) = \int_0^t (\pm \mathrm{i}(u - a))^{\beta_1} (-\mathrm{i}(u - b))^{\beta_2}\, du$.

Lemme:

(−) $I_-(\beta_1,\beta_2;0,t)(a,b) = \Phi(\beta_1,\beta_2;t)(a,b) - \Phi(\beta_1,\beta_2;0)(a,b)$ *est "analytique"*;

(+)

$$I_+(\beta_1,\beta_2;0,t)(a,b) = e^{\mathrm{i}\pi\beta_1}\Phi(\beta_1,\beta_2;t)(a,b) - e^{-\mathrm{i}\pi\beta_1}\Phi(\beta_1,\beta_2;0)(a,b)$$

$$+C(\mathrm{i}(b-a))^{\beta_1+\beta_2+1}$$

contient un terme "non analytique".

D'où en particulier: $\mathbb{E}[\mathcal{A}_{0,t}(\eta)^2] = O(1) + O(\eta^{4\alpha-1}) + \dots$

4 2e application: théorème central limite pour l'aire de Lévy renormalisée ($\alpha < 1/4$)

Hypothèse: $\alpha < 1/4$

Définition: $\tilde{\mathcal{A}}_{s,t}(\eta) := \eta^{\frac{1}{2}(1-4\alpha)}\mathcal{A}_{s,t}(\eta)$.

Théorème central limite.
Le processus $(B^{(1)}(\eta), B^{(2)}(\eta), \tilde{\mathcal{A}}(\eta))$ *converge en loi vers* $(B^{(1)}, B^{(2)}, \sqrt{C_{irr,1}}\delta W)$ *où* $\delta W_{s,t} := W_t - W_s$ *sont les incréments d'un brownien standard unidimensionnel* indépendant *de* $B^{(1)}$ *et* $B^{(2)}$.

Démonstration:
1e étape: $\mathbb{E}[e^{\mathrm{i}\lambda\mathcal{A}_{0,t}(\eta)}] = \exp\phi^{(c)}_{0,t}(\eta;\lambda)$ où

$$\phi^{(c)}_{0,t}(\eta;\lambda) = \sum_{N\geq 1}(-1)^N \frac{\phi^{(c)}_{2N}(\eta;0,t)}{2N}\lambda^{2N},$$

$$\phi^{(c)}_{2N}(\eta;0,t) = \int_0^t dx_1 \dots \int_0^t dx_{2N}$$
$$[K(\eta;x_1,x_2)K'(\eta;x_2,x_3)\dots K(\eta;x_{2N-1},x_{2N})]K'(\eta;x_{2N},x_1).$$

2e étape: calcul explicite du terme non-analytique par intégrations successives: $C_{irr,N}t\eta^{4N\alpha-1}$.

3e ÉTAPE: calcul des exposants des termes analytiques:

Lemme élémentaire.

Soit $f \in L^1([0,t],\mathbb{C})$ *analytique dans un voisinage de* 0, $\beta > -1$ *et*

$$\phi : z \mapsto \int_0^t u^\beta f(u)(-\mathrm{i}(z-u))^{2\alpha-2}\, du \quad (z \in \Pi^+).$$

Alors ϕ *s'écrit dans un voisinage de* 0*:*

$$\phi(z) = z^{2\alpha+\beta-1} F(z) + G(z) \tag{4.1}$$

où F *et* G *sont analytiques.*

Définition [fonctions analytiques admissibles]

Soit

$$f(\eta,b,t;u) := f_b(\eta,b,t;u) + f_\eta(\eta,b,t;u)$$

où f_b *et* f_η *sont analytiques en (*η*, b et) u sur un 'grand' domaine borné* Ω *excluant* $\{\frac{u}{\eta} \in -\mathrm{i}\sigma + \mathbb{R}_-\} \cup \{\frac{t-u}{\eta} \in -\mathrm{i}\sigma + \mathbb{R}_+\}$ *et s'écrivent:*

- *(*f_b*)*

$(i)_b$ $\sum_{j=1}^{J} {b'}^{B_j^{(b)}} {u'}^{U_j^{(b)}} F_j(\frac{u'}{b'},\frac{\eta}{b'})$ *sur* $(i)_b$: $0 < |u'| < 2|b'|/3$;

$(ii)_b$ $\sum_{j=1}^{J'} {b'}^{B_j^{(b)'}} F'_j(\frac{u'}{b'},\frac{\eta}{b'})$ *sur* $(ii)_b$: $|b'|/3 < |u'| < 3|b'|$;

$(iii)_b$ $\sum_{j=1}^{J''} {b'}^{B_j^{(b)''}} {u'}^{U_j^{(b)''}} F''_j(\frac{b'}{u'},\frac{\eta}{b'})$ *sur* $(iii)_b$: $2|b'| < |u'|$

avec les relations de compatibilité

$$\{(B_j^{(b)} + U_j^{(b)})\} = \{(B_{j'}^{(b)'})\} = \{(B_{j''}^{(b)''} + U_{j''}^{(b)''})\};$$

- *(f_η)*

$(ii)_\eta$ $\sum_{j=1}^{J'} \eta^{H_j^{(\eta)'}} b'^{B_j^{(\eta)'}} u'^{U_j^{(\eta)'}} F'_j(\frac{u'}{\eta}, \frac{\eta}{b'}, \frac{b'}{t})$ *sur* $(i)_\eta$: $0 < |u'| < 3\eta$;

$(iii)_\eta$

$$\sum_{j=1}^{J''} \eta^{H_j^{(\eta)''}} b'^{B_j^{(\eta)''}} u'^{U_j^{(\eta)''}} \left(F''_j(\frac{\eta}{u'}, \frac{\eta}{b'}, \frac{b'}{t}) + G''_j(\frac{u'}{t}, \frac{\eta}{b'}, \frac{b'}{t})\right) \tag{4.2}$$

sur $(iii)_\eta$: $2\eta < |u'| < 2t/3$;

$\widetilde{(iii)}_\eta$ *symétrique de* $(iii)_\eta$ *par* $u \leftrightarrow t - u$;

$\widetilde{(ii)}_\eta$ *symétrique de* $(ii)_\eta$

avec les relations de compatibilité

$$\{(B_{j'}^{(\eta)'}, H_{j'}^{(\eta)'} + U_j^{(\eta)'})\} = \{(B_{j''}^{(\eta)''}, H_{j''}^{(\eta)''} + U_{j''}^{(\eta)''})\}$$

$$\{(H_j^{(\eta)''}, B_j^{(\eta)''})\} = \{(\tilde{H}_{\tilde{j}''}^{(\eta)''}, \tilde{B}_{\tilde{j}''}^{(\eta)''})\}.$$

Alors on dit que f est une fonction analytique admissible *avec b-exposants* $\{(B_j^{(b)}, U_j^{(b)})\}$ *sur* $(i)_b$, $\{(B_j^{(b)''}, U_j^{(b)''})\}$ *sur* $(iii)_b$, *et η-exposants* $\{(H_j^{(\eta)'}, B_j^{(\eta)'}, U_j^{(\eta)'})\}$ *sur* $(ii)_\eta$, $\{(H_j^{(\eta)''}, B_j^{(\eta)''}, U_j^{(\eta)''})\}$ *sur* $(iii)_\eta$.

Théorème [action des noyaux K, K' sur les fonctions analytiques admissibles]

Soit f une fonction analytique admissible. Alors

$$g(z) := \int_0^t f(u)(\pm \mathrm{i}(z-u))^{2\alpha}\, du$$

est admissible, avec pour b-exposants:

$(i)_b$

$$\{(B_j^{(b)} + U_j^{(b)} + 2\alpha + 1, 0), (B_j^{(b)}, U_j^{(b)} + 2\alpha + 1)\}$$

sur $(i)_b$*;*

$(iii)_b$

$$\begin{aligned} &\{(B_j^{(b)} + U_j^{(b)} + 1, 2\alpha)\} \\ &\cup \{(B_j^{(b)''}, U_j^{(b)''} + 2\alpha + 1)\} \end{aligned} \tag{4.3}$$

sur $(iii)_b$,

et pour η-exponents:

$(ii)_\eta$

$$\begin{aligned}&\{(0,B_j^{(b)},U_j^{(b)}+2\alpha+1),(U_j^{(b)}+2\alpha+1,B_j^{(b)},0),(0,B_j^{(b)''},0)\}\\ &\cup\{(H_j^{(\eta)'}+U_j^{(\eta)'}+2\alpha+1,B_j^{(\eta)'},0),(H_j^{(\eta)''},B_j^{(\eta)''},0)\}\\ &\cup\{(\tilde{H}_j^{(\eta)''},\tilde{B}_j^{(\eta)''},0),(\tilde{H}_j^{(\eta)''}+\tilde{U}_j^{(\eta)''}+1,\tilde{B}_j^{(\eta)''},0)\} \qquad (4.4)\end{aligned}$$

$(iii)_\eta$

$$\begin{aligned}&\{(U_j^{(b)}+1,B_j^{(b)},2\alpha)_{j=1\ldots J}\}\cup\{(0,B_j^{(b)''},0)\}\\ &\cup\{(H_j^{(\eta)''}+U_j^{(\eta)''}+1,B_j^{(\eta)''},2\alpha)\}\\ &\cup\{(H_j^{(\eta)''},B_j^{(\eta)''},U_j^{(\eta)''}+2\alpha+1),(H_j^{(\eta)''},B_j^{(\eta)''},0)\}\\ &\cup\{(\tilde{H}_j^{(\eta)''}+\tilde{U}_j^{(\eta)''}+1,\tilde{B}_j^{(\eta)''},0),(\tilde{H}_j^{(\eta)''},\tilde{B}_j^{(\eta)''},0)\} \qquad (4.5)\end{aligned}$$

$\widetilde{(iii)}_\eta$

$\widetilde{(ii)}_\eta$

On trouve finalement: $\phi^{(c)}_{2N}(\eta;t) = C_{irr,N}t\eta^{4N\alpha-1} + C_{reg,N}t^{4N\alpha} + O(\eta^{2\alpha})$.

4e étape: (combinatoire) $\mathbb{E}[\mathcal{A}_{0,t}(\eta)^{2N}] = (2N-1)!!C^N_{irr,1}\eta^{(4\alpha-1)N}(1+O(\eta^{1-4\alpha}))$.

5e étape: Les moments de tous ordres des distributions finies de $\tilde{\mathcal{A}}(\eta)$ et $B(\eta)$ convergent vers ceux de δW et B.

6e étape: (probabiliste) convergence en loi des processus.

5 3e application: e.d.s dirigées par un bruit fractionnaire complexe d'indice quelconque.

Travail en cours avec S. Tindel.

Définition: *Le brownien fractionnaire analytique d'indice de Hurst α est le processus gaussien centré à valeurs complexes de noyau de covariance K^-.*

Exemple: Γ_t $(t \in \mathbb{R})$.

Propriétés:

(i) $2\mathrm{Re}\ \Gamma_t, 2\mathrm{Im}\ \Gamma_t \stackrel{(d)}{=} B_t$ mais $\mathrm{Re}\ \Gamma_t$ et $\mathrm{Im}\ \Gamma_t$ sont *dépendants*;

(ii) Γ_t est un processus $(\alpha - \varepsilon)$-Hölder, valeur au bord de Γ_z, $z \in \Pi^+$ régulier.

Théorème. Γ_t *se relève en une fonctionnelle multiplicative.*

$\Longrightarrow$ ('chemins rugueux' complexes) calcul d'intégrales stochastiques $\int \sigma_1(\Gamma_s)d\Gamma_s^{(1)} + \ldots + \sigma_d(\Gamma_s)d\Gamma_s^{(d)}$ et résolution d'e.d.s. dirigées par Γ *pour tout indice de Hurst* $\alpha \in (0, 1)$.