Pénalisation de diffusions récurrentes par une fonction exponentielle de leur temps local

Christophe Profeta

Institut Elie Cartan
Nancy I

Journées de Probabilités 2008

Plan de la présentation

Historique

- Depuis quelques années, les travaux de Roynette, Vallois et Yor ont fournit de très nombreux résultats de pénalisations, concernant pour la plupart le mouvement brownien ou les processus de Bessel de dimension $\delta \in]0,2[$.
- Peut-on généraliser les résultats obtenus dans le cas brownien à des diffusions quelconques ?

Historique

- Depuis quelques années, les travaux de Roynette, Vallois et Yor ont fournit de très nombreux résultats de pénalisations, concernant pour la plupart le mouvement brownien ou les processus de Bessel de dimension $\delta \in]0, 2[$.

- Peut-on généraliser les résultats obtenus dans le cas brownien à des diffusions quelconques ?

Notations

On considère X une diffusion récurrente, régulière, à valeurs dans $I = [0, l)$. On la suppose à échelle naturelle, réfléchie en 0, et définie sur l'espace canonique $\Omega := \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+)$.

On note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle et $\mathcal{F}_\infty := \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$.

On suppose par ailleurs que sa mesure de vitesse m est sans atomes, et strictement positive sur un voisinage de 0.

Notations

On considère X une diffusion récurrente, régulière, à valeurs dans $I = [0, l)$. On la suppose à échelle naturelle, réfléchie en 0, et définie sur l'espace canonique $\Omega := \mathcal{C}(\mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}_+)$.

On note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle et $\mathcal{F}_\infty := \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$.

On suppose par ailleurs que sa mesure de vitesse m est sans atomes, et strictement positive sur un voisinage de 0.

Définition

Soit $(\Gamma_t, t \geq 0)$ un processus mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $(\mathcal{F}_t)$-adapté, et tel que $0 < \mathbb{E}_x[\Gamma_t] < \infty$ pour tout $t > 0$ et tout $x \in I$.

Définition

On dit que $(\Gamma_t, t \geq 0)$ satisfait le *principe de pénalisation* s'il existe une probabilité $\mathbb{Q}_x$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ telle que :

$$\forall s > 0,\ \forall \Lambda_s \in \mathcal{F}_s,\ \lim_{t \to \infty} \mathbb{E}_x \left[1_{\Lambda_s} \frac{\Gamma_t}{\mathbb{E}_x[\Gamma_t]} \right] = \mathbb{Q}_x(\Gamma_s).$$

En fait :

$$\mathbb{Q} \lhd \mathbb{P} \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}_{|\mathcal{F}_s} = M_s^\Gamma \cdot \mathbb{P}_{|\mathcal{F}_s}$$

On choisit désormais $(\Gamma_t, t \geq 0) = (e^{-\alpha L_t}, t \geq 0)$ où $\alpha > 0$ et L représente le temps local en 0 de X.

Définition

Soit $(\Gamma_t, t \geq 0)$ un processus mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $(\mathcal{F}_t)$-adapté, et tel que $0 < \mathbb{E}_x[\Gamma_t] < \infty$ pour tout $t > 0$ et tout $x \in I$.

Définition

On dit que $(\Gamma_t, t \geq 0)$ satisfait le *principe de pénalisation* s'il existe une probabilité $\mathbb{Q}_x$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ telle que :

$$\forall s > 0,\ \forall \Lambda_s \in \mathcal{F}_s,\ \lim_{t \to \infty} \mathbb{E}_x \left[1_{\Lambda_s} \frac{\Gamma_t}{\mathbb{E}_x[\Gamma_t]} \right] = \mathbb{Q}_x(\Gamma_s).$$

En fait :

$$\mathbb{Q} \lhd \mathbb{P} \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}_{|\mathcal{F}_s} = M_s^\Gamma \cdot \mathbb{P}_{|\mathcal{F}_s}$$

On choisit désormais $(\Gamma_t, t \geq 0) = (e^{-\alpha L_t}, t \geq 0)$ où $\alpha > 0$ et L représente le temps local en 0 de X.

Définition

Soit $(\Gamma_t, t \geq 0)$ un processus mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, $(\mathcal{F}_t)$-adapté, et tel que $0 < \mathbb{E}_x[\Gamma_t] < \infty$ pour tout $t > 0$ et tout $x \in I$.

Définition

On dit que $(\Gamma_t, t \geq 0)$ satisfait le *principe de pénalisation* s'il existe une probabilité $\mathbb{Q}_x$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ telle que :

$$\forall s > 0,\ \forall \Lambda_s \in \mathcal{F}_s,\ \lim_{t \to \infty} \mathbb{E}_x \left[1_{\Lambda_s} \frac{\Gamma_t}{\mathbb{E}_x[\Gamma_t]} \right] = \mathbb{Q}_x(\Gamma_s).$$

En fait :

$$\mathbb{Q} \lhd \mathbb{P} \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}_{|\mathcal{F}_s} = M_s^\Gamma \cdot \mathbb{P}_{|\mathcal{F}_s}$$

On choisit désormais $(\Gamma_t, t \geq 0) = (e^{-\alpha L_t}, t \geq 0)$ où $\alpha > 0$ et L représente le temps local en 0 de X.

Cas récurrent nul : $\mathbb{E}_x[T_0] = +\infty$

Exemple du mouvement brownien réfléchi en 0

Théorème [Roynette, Vallois, Yor]

- $\mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha L_t}\right] \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left(x + \frac{1}{\alpha}\right)$
- $\mathbb{Q}^{(\alpha)}_{|\mathcal{F}_s} = \left(x + \frac{1}{\alpha}\right)\alpha e^{-\alpha L_s} \cdot \mathbb{P}_{|\mathcal{F}_s}$
- $\mathbb{Q}^{(\alpha)}(L_\infty \in dl) = \alpha e^{-\alpha l} 1_{\{l\geq 0\}}$

$\Longrightarrow$ *Le temps local est fini sous $\mathbb{Q}^{(\alpha)}$, et le processus est devenu transient.*

Cas récurrent nul : $\mathbb{E}_x[T_0] = +\infty$

Exemple du mouvement brownien réfléchi en 0

Théorème [Roynette, Vallois, Yor]

- $\mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha L_t}\right] \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left(x + \frac{1}{\alpha}\right)$
- $\mathbb{Q}^{(\alpha)}_{|\mathcal{F}_s} = \left(x + \frac{1}{\alpha}\right)\alpha e^{-\alpha L_s} \cdot \mathbb{P}_{|\mathcal{F}_s}$
- $\mathbb{Q}^{(\alpha)}(L_\infty \in dl) = \alpha e^{-\alpha l} 1_{\{l \geq 0\}}$

$\Longrightarrow$ *Le temps local est fini sous $\mathbb{Q}^{(\alpha)}$, et le processus est devenu transient.*

Cas récurrent nul : $\mathbb{E}_x[T_0] = +\infty$

Exemple du mouvement brownien réfléchi en 0

Théorème [Roynette, Vallois, Yor]

- $\mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha L_t}\right] \underset{t\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2}{\pi t}}\left(x+\frac{1}{\alpha}\right)$
- $\mathbb{Q}^{(\alpha)}_{|\mathcal{F}_s} = \left(x+\frac{1}{\alpha}\right)\alpha e^{-\alpha L_s}\cdot \mathbb{P}_{|\mathcal{F}_s}$
- $\mathbb{Q}^{(\alpha)}(L_\infty \in dl) = \alpha e^{-\alpha l} 1_{\{l\geq 0\}}$

$\Longrightarrow$ *Le temps local est fini sous $\mathbb{Q}^{(\alpha)}$, et le processus est devenu transient.*

Cas récurrent nul : $\mathbb{E}_x[T_0] = +\infty$

Exemple du mouvement brownien réfléchi en 0

Soit $g = \sup\{t \geq 0; X_t = 0\}$.

Théorème [Roynette, Vallois, Yor]

1. $\mathbb{Q}^{(\alpha)}(0 < g < \infty) = 1$,
2. Conditionnellement à g, $(X_t, t \leq g)$ et $(X_{g+t}, t \geq 0)$ sont indépendants,
3. $(X_{g+t}, t \geq 0)$ a même loi qu'un processus de Bessel de dimension 3 issu de 0,
4. Conditionnellement à $L_\infty = l$, $(X_t, t \leq g)$ a même loi qu'un mouvement brownien réfléchi en 0 et stoppé quand son temps local atteint le niveau l.

Cas récurrent positif : $\mathbb{E}_x[T_0] < +\infty$

Exemple du mouvement brownien réfléchi en 0 et en 1

Théorème

Soit r l'unique solution dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ de l'équation $\alpha = r\tan(r)$.

- $\mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha L_t}\right] \underset{t\to\infty}{\sim} \exp\left(-\frac{r^2}{2}t\right)\frac{\cos(r(1-x))}{\cos(r)}\frac{2\alpha}{r^2+\alpha+\alpha^2}$
- $\mathbb{Q}^{(\alpha)}_{x|\mathcal{F}_s} = \exp\left(\frac{r^2}{2}s - \alpha L_s\right)\frac{\cos(r(1-X_s))}{\cos(r(1-x))}\cdot \mathbb{P}_{x|\mathcal{F}_s}$
- $\mathbb{Q}^{(\alpha)}_x(L_\infty = \infty) = 1$

$\Longrightarrow$ *Le temps local reste infini sous* $\mathbb{Q}^{(\alpha)}$.

Cas récurrent positif : $\mathbb{E}_x[T_0] < +\infty$

Exemple du mouvement brownien réfléchi en 0 et en 1

Théorème

Soit r l'unique solution dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ de l'équation $\alpha = r\tan(r)$.

- $\mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha L_t}\right] \underset{t\to\infty}{\sim} \exp\left(-\frac{r^2}{2}t\right)\frac{\cos(r(1-x))}{\cos(r)}\frac{2\alpha}{r^2+\alpha+\alpha^2}$
- $\mathbb{Q}^{(\alpha)}_{x|\mathcal{F}_s} = \exp\left(\frac{r^2}{2}s - \alpha L_s\right)\frac{\cos(r(1-X_s))}{\cos(r(1-x))}\cdot\mathbb{P}_{x|\mathcal{F}_s}$
- $\mathbb{Q}^{(\alpha)}_x(L_\infty = \infty) = 1$

$\Longrightarrow$ *Le temps local reste infini sous* $\mathbb{Q}^{(\alpha)}$.

Cas récurrent positif : $\mathbb{E}_x[T_0] < +\infty$

Exemple du mouvement brownien réfléchi en 0 et en 1

Théorème

Soit r l'unique solution dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ de l'équation $\alpha = r\tan(r)$.

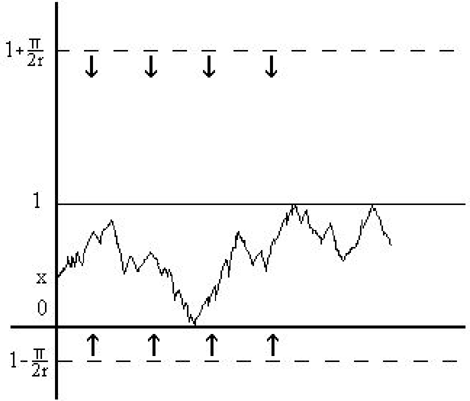
- $\mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha L_t}\right] \underset{t\to\infty}{\sim} \exp\left(-\frac{r^2}{2}t\right)\frac{\cos(r(1-x))}{\cos(r)}\frac{2\alpha}{r^2+\alpha+\alpha^2}$
- $\mathbb{Q}^{(\alpha)}_{x|\mathcal{F}_s} = \exp\left(\frac{r^2}{2}s - \alpha L_s\right)\frac{\cos(r(1-X_s))}{\cos(r(1-x))}\cdot \mathbb{P}_{x|\mathcal{F}_s}$
- $\mathbb{Q}^{(\alpha)}_x(L_\infty = \infty) = 1$

$\Longrightarrow$ *Le temps local reste infini sous* $\mathbb{Q}^{(\alpha)}$.

Sous $\mathbb{Q}^{(\alpha)}$, X est solution de l'EDS :

$$X_t = x + \widetilde{B}_t + L_t^0(X) - L_t^1(X) + \int_0^t r\tan(r(1 - X_s))ds,$$

où $\widetilde{B}_t$ est un $\mathbb{Q}^{(\alpha)}$-mouvement brownien issu de 0.



Préliminaires

On suppose : $I = [0, l]$, $m(dx) = m(x)dx$ et $l + m([0, l[) < \infty$.
On introduit sa résolvante :

$$R_\lambda(x, y) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} p(t, x, y) dt,$$

où $p(t, x, y)$ désigne la densité de transition de X, ainsi que son générateur infinitésimal $\mathcal{G} := \frac{\partial^2}{\partial m \partial x}$.
Notant Φ et Ψ les 2 fonctions propres solutions de :

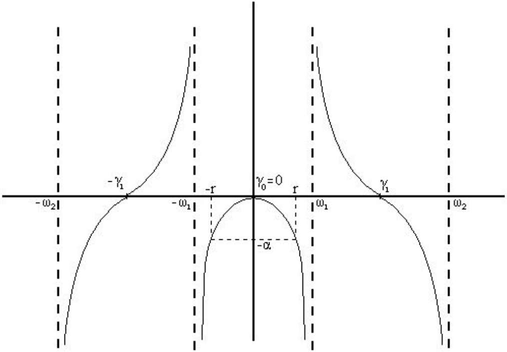
$$\begin{cases} \mathcal{G}[\Phi(\cdot, \lambda)] = \lambda \Phi(\cdot, \lambda) \text{ sur } [0, l] \\ \Phi(0, \lambda) = 1 \text{ et } \Phi'(0, \lambda) = 0, \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \mathcal{G}[\Psi(\cdot, \lambda)] = \lambda \Psi(\cdot, \lambda) \text{ sur } [0, l] \\ \Psi(0, \lambda) = 0 \text{ et } \Psi'(0, \lambda) = 1. \end{cases}$$

On a :

$$R_\lambda(x, y) = \Phi(x, \lambda) \left(R_\lambda(0, 0) \Phi(y, \lambda) - \Psi(y, \lambda) \right) \quad \text{for } x \leq y.$$

Etude de la résolvante

Ici, la fonction $\omega \mapsto \frac{1}{R_{-\omega^2}(0{,}0)}$ est méromorphe, ses zéros et ses pôles étant tous réels.



L'équation $\alpha + \dfrac{1}{R_{-\omega^2}(0,0)} = 0$ admet donc une unique solution r dans $[0, \omega_1[$.

Résultats

Hypothèse

Il existe $\beta > 0$ et $c \in]r^2, \omega_1^2[$ tel que :

$$\forall a \in [0, c],\ R_{-a+iv}(0,0) \underset{v \to \pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{v^\beta}\right).$$

Théorème

- $\mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha L_t}\right] \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{r^2} R_{-r^2}(0,x) \frac{1}{\frac{\partial}{\partial z} R_z(0,0)_{|z=-r^2}} \exp(-r^2 t)$
- $\mathbb{Q}^{(\alpha)}_{x|\mathcal{F}_s} = \exp\left(r^2 s - \alpha L_s\right) \frac{R_{-r^2}(0, X_s)}{R_{-r^2}(0,x)} \cdot \mathbb{P}_{x|\mathcal{F}_s}$
- $\mathbb{Q}^{(\alpha)}_x(L_\infty = \infty) = 1.$

Résultats

Hypothèse

Il existe $\beta > 0$ et $c \in]r^2, \omega_1^2[$ tel que :

$$\forall a \in [0, c],\ R_{-a+iv}(0,0) \underset{v \to \pm\infty}{=} o\left(\frac{1}{v^\beta}\right).$$

Théorème

- $\mathbb{E}_x\left[e^{-\alpha L_t}\right] \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{r^2} R_{-r^2}(0,x) \frac{1}{\frac{\partial}{\partial z} R_z(0,0)_{|z=-r^2}} \exp(-r^2 t)$
- $\mathbb{Q}^{(\alpha)}_{x|\mathcal{F}_s} = \exp\left(r^2 s - \alpha L_s\right) \frac{R_{-r^2}(0, X_s)}{R_{-r^2}(0,x)} \cdot \mathbb{P}_{x|\mathcal{F}_s}$
- $\mathbb{Q}^{(\alpha)}_x(L_\infty = \infty) = 1.$

Bibliographie

H. Dym and H. P. McKean
Gaussian processes, function theory, and the inverse spectral problem.
Academic Press, 1976.

L. C. G. Rogers and D. Williams
Diffusions, Markov processes, and martingales.
Cambridge University Press, 2000.

B. Roynette, P. Vallois and M. Yor
Some penalisations of the Wiener measure.
Jpn. J. Math., 1(1) :263–290, 2006.