Intégration par parties sur l'espace de Wiener

Ivan Nourdin (Paris 6)

Références

(a) I. N. et G. Peccati: "Stein's method on Wiener chaos", PTRF (à paraître)

(b) I. N. et G. Peccati: "Stein's method and exact Berry-Esséen asymptotics for functionals of Gaussian fields" (preprint)

(c) I. N. et F. Viens: "Density estimates and concentration inequalities with Malliavin calculus" (preprint)

Cadre de travail

Soit X un processus gaussien centré isonormal, i.e.

$$X = \{X(h),\, h \in \mathfrak{H}\}$$

avec $\mathfrak{H}$ = espace de Hilbert (séparable) et

$$E\Big(X(h)X(g)\Big) = \langle h, g \rangle_{\mathfrak{H}}.$$

Exemple: processus de Wiener avec $\mathfrak{H} = L^2([0,T], dx)$.

Notations classiques du calcul de Malliavin

(principale référence: livre de Nualart)

$L^2(X)$ = ensemble des v.a. de carrés intégrables qui sont $\sigma\{X\}$-mesurables

D = dérivée de Malliavin (domaine: $\mathbb{D}^{1,2}$)

δ = intégrale de Skorohod (domaine: Domδ)

L = générateur du semi-groupe d'Orstein-Uhlenbeck

L^{-1} = inverse de L (défini pour des v.a. *centrées*)

Trois relations (formelles) vérifiées par D, δ et/ou L

$L = -\delta D$

"Chain Rule": $Df(Y) = f'(Y) \times DY$

"Intégration par parties": $E(Y\delta(u)) = E(\langle DY, u\rangle_{\mathfrak{H}})$

Intégration par parties sur l'espace de Wiener

Soient $Y \in \mathbb{D}^{1,2}$ *centrée*, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ avec f' bornée. Alors

$$\begin{aligned}
E\Big(Y f(Y)\Big) &= E\Big(LL^{-1}Y\, f(Y)\Big) \\
&= E\Big(\delta D(-L^{-1}Y)\, f(Y)\Big) \\
&= E\Big(\langle Df(Y), -DL^{-1}Y\rangle_{\mathfrak{H}}\Big) \\
&= E\Big(f'(Y)\langle DY, -DL^{-1}Y\rangle_{\mathfrak{H}}\Big).
\end{aligned}$$

IPP sur l'espace de Wiener: $E\Big(Y f(Y)\Big) = E\Big(f'(Y)\langle DY, -DL^{-1}Y\rangle_{\mathfrak{H}}\Big)$

Première utilisation (N.-Viens, 2008, Preprint)

THM. Soit $Y \in \mathbb{D}^{1,2}$ centrée. Supposons l'existence de $\sigma_{\text{min}} > 0$ tel que

$$E\Big(\langle DY, -DL^{-1}Y\rangle_{\mathfrak{H}} | Y\Big) \geq \sigma_{\text{min}}^2 \quad \text{p.s.}$$

Alors Y a une densité ρ, son support est $\mathbb{R}$ et, presque partout, $\rho(y)$ est donnée par

$$\frac{E|Y|}{2\, E(\langle DY, -DL^{-1}Y\rangle_{\mathfrak{H}} | Y = y)} \exp\left(-\int_0^y \frac{x\,dx}{E(\langle DY, -DL^{-1}Y\rangle_{\mathfrak{H}} | Y = x)}\right).$$

Quelques éléments de la preuve.

1er pas: existence de ρ. On montre, pour tous $a < b$, qu'on a

$$P(a \leq Y \leq b) \leq \frac{E|Y|}{\sigma^2_{\text{min}}} \, (b - a).$$

Ceci implique l'absolue continuité de Y, autrement que Y est à densité.

2ème pas: une formule clé. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue à support compact. On note F une primitive (bornée) de f. On a

$$\begin{aligned}
E\Big(f(Y)\langle DY, -DL^{-1}Y\rangle_{\mathfrak{H}}\Big) &= E\Big(F(Y)Y\Big) \quad \text{par IPP} \\
&= \int_{\mathbb{R}} F(y)\, y\, \rho(y)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(y) \left(\int_y^{\infty} z\rho(z)dz\right) dy \quad \text{par IPP} \\
&= E\left(f(Y)\frac{\int_Y^{\infty} z\rho(z)dz}{\rho(Y)}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a montré

$$E(\langle DY, -DL^{-1}Y\rangle_{\mathfrak{H}}|Y) = \frac{\int_Y^{\infty} z\rho(z)dz}{\rho(Y)} \quad \text{p.s.}$$

3ème pas: le support de ρ est $\mathbb{R}$. Il faut se fatiguer un peu, mais ce n'est pas trop difficile!

4ème pas: conclusion. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(y) = \int_y^\infty z\rho(z)dz$. D'une part, on a $\varphi'(y) = -y\rho(y)$ presque partout. D'autre part, par la formule du 2ème pas, on a, presque partout:

$$\varphi(y) = \rho(y)E(\langle DY, -DL^{-1}Y\rangle_{\mathfrak{H}}|Y = y).$$

En résolvant l'équa. diff. qui en découle, on obtient la formule annoncée, à savoir

$$\rho(y) = \frac{E|Y|}{2\,E(\langle DY, -DL^{-1}Y\rangle_{\mathfrak{H}}|Y = y)} \exp\left(-\int_0^z \frac{x\,dx}{E(\langle DY, -DL^{-1}Y\rangle_{\mathfrak{H}}|Y = x)}\right).$$

Application au maximum centré du MBF

Soit $B = (B_t, t \geq 0)$ un MBF d'indice $H > 1/2$. On note B' une copie indépendante de B, et $\mathbf{E}$ l'espérance mathématique par rapport à $P \times P'$.

Pour $b > a > 0$ fixés, soit $Y = \sup_{[a,b]} B - E(\sup_{[a,b]} B)$.

Pour chaque $u \geq 0$, considérons $B^{(u)} = e^{-u}B + \sqrt{1-e^{-2u}}B'$. Remarquons que $B^{(u)}$ est un MBF d'indice H, et notons τ_u l'(unique) point de $[a,b]$ tel que $B^{(u)}_{\tau_u} = \sup_{[a,b]} B^{(u)}$.

Alors on peut montrer que

$$E(\langle DY, -DL^{-1}Y\rangle_{\mathfrak{H}}|Y=y) = \int_0^\infty e^{-u}\,\mathbf{E}\Big(R_H(\tau_0,\tau_u)|Y=y\Big)du,$$

où $R_H(s,t) = E(B_sB_t) = \frac{1}{2}\Big(s^{2H}+t^{2H}-|t-s|^{2H}\Big)$.

Ainsi

THM. Soient $b > a > 0$, et $B = (B_t, t \geq 0)$ un MBF d'indice $H > 1/2$. Alors la variable aléatoire $Y = \sup_{[a,b]} B - E\Big(\sup_{[a,b]} B\Big)$ a une densité continue $\rho(y)$ donnée par:

$$\frac{E|Y|}{2\int_0^\infty e^{-u}\,\mathbf{E}\Big(R_H(\tau_0,\tau_u)|Y=y\Big)du}\,\exp\left(-\int_0^y \frac{x\,dx}{\int_0^\infty e^{-u}\,\mathbf{E}\Big(R_H(\tau_0,\tau_u)|Y=x\Big)du}\right)$$

En particulier, on a

$$\frac{E|Y|}{2\,b^{2H}}\,e^{-\frac{y^2}{2\,a^{2H}}} \leqslant \rho(y) \leqslant \frac{E|Y|}{2\,a^{2H}}\,e^{-\frac{y^2}{2\,b^{2H}}}$$

pour tout $y \in \mathbb{R}$.

COR. Inégalités de concentration, i.e. bornes pour $P(Y \geq y)$.

<u>Deuxième utilisation</u> (N.-Peccati, 2007, PTRF)

Lemme (Stein). Une v.a. Y a pour loi $\mathscr{N}(0,1)$ si et seulement si $E\Big(f'(Y) - Yf(Y)\Big) = 0$ pour "toute" fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Heuristiquement: Si Y est une v.a. telle que $E\Big(f'(Y) - Yf(Y)\Big) \approx 0$ pour une large classe de fonctions f, alors la loi de Y est approximativement $\mathscr{N}(0,1)$.

Mathématiquement: Fixons $z \in \mathbb{R}$, posons

$$\Phi(z) = P\Big(\mathcal{N}(0,1) \leq z\Big)$$

et définissons $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{x} \Big(\mathbf{1}_{(-\infty,z]}(a) - \Phi(z)\Big) e^{-\frac{a^2}{2}} da.$$

Alors f est dérivable partout sauf en z, vérifie

$$f'(x) - xf(x) = \mathbf{1}_{(-\infty,z]}(x) - \Phi(z), \quad x \in \mathbb{R},$$

et est telle que $\|f'\|_\infty \leq 1$.

On en déduit que, pour toute v.a. Y:

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} \Big| P(Y \leq z) - \Phi(z) \Big| \leq \sup_{\|f'\|_\infty \leq 1} \Big| E(f'(Y)) - E(Y f(Y)) \Big|.$$

C'est-à-dire, en utilisant l'IPP sur l'espace de Wiener:

$$
\begin{aligned}
\sup_{z\in\mathbb{R}} \Big| P(Y \leq z) - \Phi(z) \Big| &\leq \sup_{\|f'\|_\infty \leq 1} \Big| E(f'(Y)) - E(Yf(Y)) \Big| \\
&\leq \sup_{\|f'\|_\infty \leq 1} \Big| E(f'(Y)(1 - \langle DY, -DL^{-1}Y \rangle_{\mathfrak{H}})) \Big| \\
&\leq E\Big| 1 - \langle DY, -DL^{-1}Y \rangle_{\mathfrak{H}} \Big| \\
&\leq \sqrt{E\Big| 1 - \langle DY, -DL^{-1}Y \rangle_{\mathfrak{H}} \Big|^2}.
\end{aligned}
$$

Exemple d'application: bornes associées à Breuer-Major

Soit B un MBF d'indice $0 < H \leq 1 - 1/(2q)$ pour $q \geq 2$ fixé. On pose

$$Y_n = \begin{cases} \frac{1}{\sigma_H(n)\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} h_q(B_{k+1} - B_k) & \text{si } H < 1 - 1/(2q) \\ \frac{1}{\sigma_H(n)\sqrt{n \log n}} \sum_{k=0}^{n-1} h_q(B_{k+1} - B_k) & \text{si } H = 1 - 1/(2q) \end{cases}$$

où h_q est le $q$ième polynôme d'Hermite ($h_2(x) = x^2 - 1$, $h_3(x) = x^3 - 3x$, etc.) et $\sigma_H(n)$ est tel que $E(Y_n^2) = 1$.

THM. On a

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |P(Y_n \le z) - \Phi(z)| \le c_{q,H} \times \begin{cases} n^{-1/2} & \text{si } 0 < H \le \frac{1}{2} \\ n^{H-1} & \text{si } \frac{1}{2} \le H \le \frac{2q-3}{2q-2} \\ n^{qH-q+1/2} & \text{si } \frac{2q-3}{2q-2} \le H < 1 - \frac{1}{2q} \\ \frac{1}{\sqrt{\log n}} & \text{si } H = 1 - \frac{1}{2q}. \end{cases}$$

Quand $H > 1 - 1/(2q)$, il faut poser $Y_n = \frac{1}{n^{1-(1-H)q}} \sum_{k=0}^{n-1} h_q(B_{k+1} - B_k)$. Alors $Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Loi}} T \sim$ v.a. d'Hermite, et on a (cf. Breton/N., ECP, 2008)

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |P(Y_n \le z) - P(T \le z)| \le c_{q,H}\, n^{1-1/(2q)-H}.$$

<u>**Troisième utilisation**</u> (N.-Peccati, 2008, Preprint)

Soit (Y_n) une suite centrée réduite de $\mathbb{D}^{1,2}$. On a

$$\frac{P(Y_n \leq z) - \Phi(z)}{\sqrt{\mathrm{Var}(\langle DY_n, -DL^{-1}Y_n\rangle_{\mathfrak{H}})}} = E\left(f_z'(Y_n) \times \frac{1 - \langle DY_n, -DL^{-1}Y_n\rangle_{\mathfrak{H}}}{\sqrt{\mathrm{Var}(\langle DY_n, -DL^{-1}Y_n\rangle_{\mathfrak{H}})}}\right).$$

pour

$$f_z(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_{-\infty}^{x} \Big(\mathbf{1}_{(-\infty,z]}(a) - \Phi(z)\Big) e^{-\frac{a^2}{2}} da.$$

Si

$$\left(Y_n, \frac{1 - \langle DY_n, -DL^{-1}Y_n\rangle_{\mathfrak{H}}}{\sqrt{\mathrm{Var}(\langle DY_n, -DL^{-1}Y_n\rangle_{\mathfrak{H}})}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{Loi}} (N_1, N_2) \sim \mathscr{N}\left(0, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right),$$

alors

$$\frac{P(Y_n \leq z) - \Phi(z)}{\sqrt{\mathsf{Var}(\langle DY_n, -DL^{-1}Y_n\rangle_{\mathfrak{H}})}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} E\left(f_z'(N_1)N_2\right) = \frac{\rho}{3}\,\Phi'''(z).$$

Retour à Breuer-Major. Fixons $q \geq 2$ *pair*. Supposons $H < \frac{1}{2}$. Posons

$$Y_T = \frac{1}{\sigma_H(T)\sqrt{T}} \int_0^T h_q(B_{u+1} - B_u)du, \qquad T > 0,$$

où $\sigma_H(T) > 0$ est tel que $E(Y_T^2) = 1$.

THM (N./Peccati). Pour tout $z \in \mathbb{R}$, on a

$$\sqrt{T}\Big(P(Y_T \leq z) - \Phi(z)\Big) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\gamma}{3}(z^2 - 1)\frac{e^{-z^2/2}}{\sqrt{2\pi}},$$

où

$$\gamma = \frac{q!(\frac{q}{2})!\binom{q}{q/2}^2}{2\sigma^3(\infty)} \int_{\mathbb{R}^2} \rho^{\frac{q}{2}}(x)\rho^{\frac{q}{2}}(y)\rho^{\frac{q}{2}}(x-y)dxdy$$

pour $\rho(x) = \frac{1}{2}\Big(|x+1|^{2H} + |x-1|^{2H} - 2|x|^{2H}\Big)$.

Fonctionnelles de Toeplitz. Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}}$ un processus gaussien (centré) stationnaire. On note f sa densité spectrale, i.e. pour tout $u, t \in \mathbb{R}$, on a $E(X_u X_{u+t}) = r(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} f(\lambda) d\lambda$.

Pour $T > 0$, soit

$$Q_T = \iint_{[0,T]^2} \widehat{g}(t-s) X_t X_s dt ds$$

où $\widehat{g}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda t} g(\lambda) d\lambda$. Posons $Y_T = \frac{Q_T - E(Q_T)}{\sqrt{\mathrm{Var}(Q_T)}}$.

THM (Ginovyan/Sahakyan, PTRF). Supposons $f \in L^p(\mathbb{R})$ ($p \geq 1$) et $g \in L^q(\mathbb{R})$ ($q \geq 1$). Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{2}$, alors

$$Y_T \xrightarrow[T\to\infty]{\text{Loi}} Z \sim \mathscr{N}(0,1).$$

THM (N./Peccati). Supposons $f \in L^p(\mathbb{R})$ $(p \geq 1)$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$ $(q \geq 1)$.
1) Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{4}$, alors

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} |P(Y_T \leq z) - \Phi(z)| = O(1/\sqrt{T}).$$

2) Si $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq \frac{1}{8}$, alors pour tout $z \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{T}\Big(P(Y_T \leq z) - \Phi(z)\Big) \underset{T\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\int_{\mathbb{R}} f^3(x)g^3(x)dx}{(\int_{\mathbb{R}} f^2(x)g^2(x)dx)^{3/2}}(1-z^2)e^{-z^2/2}.$$