

Aspects géométriques des limites d'échelle des cartes aléatoires

G. Miermont

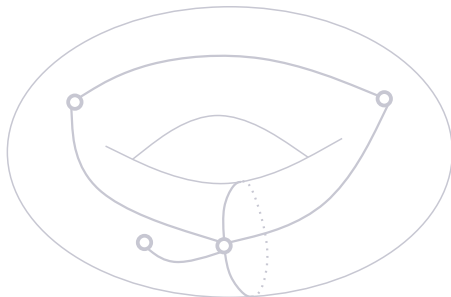
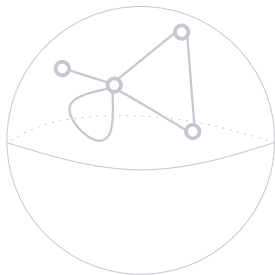
LPMA, Université Pierre et Marie Curie
& Fondation des Sciences Mathématiques de Paris

Journées de probabilités 2008, Lille

Maps

Definition

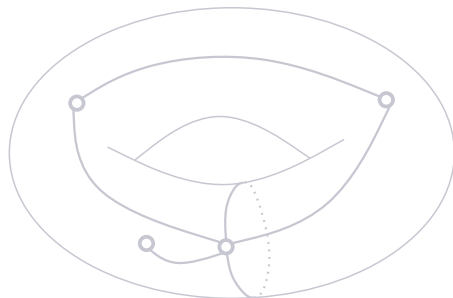
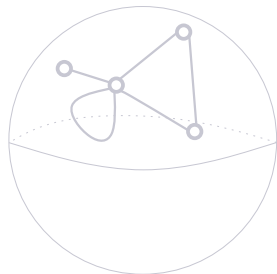
Une **carte** est un plongement propre d'un graphe dans une surface de dimension 2 (compacte, orientée, connexe), qui la découpe en cellules qui sont des disques topologiques, et considéré à homéomorphisme direct près de la surface.



Maps

Definition

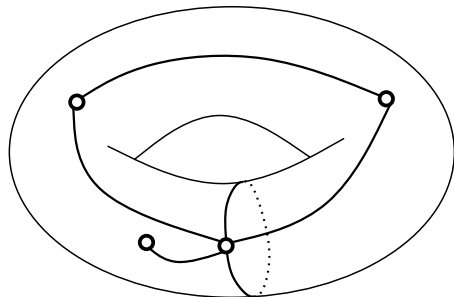
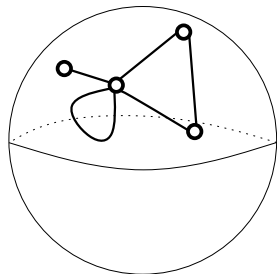
Une **carte** est un plongement propre d'un graphe dans une surface de dimension 2 (compacte, orientée, connexe), qui la découpe en cellules qui sont des disques topologiques, et considéré à homéomorphisme direct près de la surface.



Maps

Definition

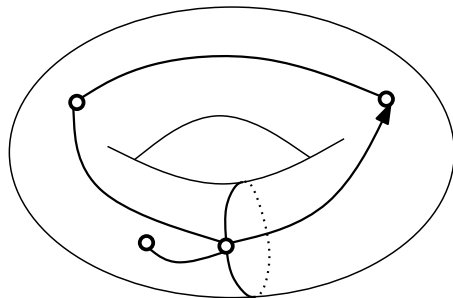
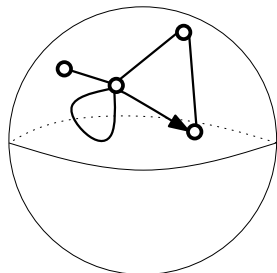
Une **carte** est un plongement propre d'un graphe dans une surface de dimension 2 (compacte, orientée, connexe), qui la découpe en cellules qui sont des disques topologiques, et considéré à homéomorphisme direct près de la surface.



Maps

Definition

Une **carte** est un plongement propre d'un graphe dans une surface de dimension 2 (compacte, orientée, connexe), qui la découpe en cellules qui sont des disques topologiques, et considéré à homéomorphisme direct près de la surface.

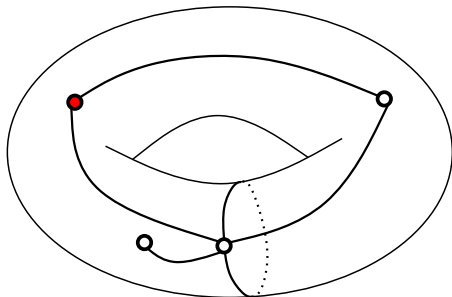
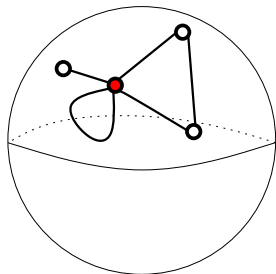


Cartes enracinées

Maps

Definition

Une **carte** est un plongement propre d'un graphe dans une surface de dimension 2 (compacte, orientée, connexe), qui la découpe en cellules qui sont des disques topologiques, et considéré à homéomorphisme direct près de la surface.



Cartes pointées

Résultats d'énumération

Théorème

Arbres plans enracinés (cartes à une face) à n arêtes :

$$\#\mathbf{T}_n = \text{Cat}_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi}} n^{-3/2}.$$

Soit \mathbf{Q}_n^g l'ensemble des *quadrangulations biparties* enracinées, de genre g , à n faces (\sim cartes enracinées de genre g à n arêtes)

$$\#\mathbf{Q}_n^0 = \frac{2}{n+2} 3^n \text{Cat}_n \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} 12^n n^{-5/2} \quad [\text{Tutte 1963}]$$

$$\#\mathbf{Q}_n^g \sim t_g 12^n n^{-5\chi(g)/4} \quad [\text{Bender \& Canfield 1986}]$$

Résultats d'énumération

Théorème

Arbres plans enracinés (cartes à une face) à n arêtes :

$$\#\mathbf{T}_n = \text{Cat}_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi}} n^{-3/2}.$$

Soit \mathbf{Q}_n^g l'ensemble des *quadrangulations biparties* enracinées, de genre g , à n faces (\sim cartes enracinées de genre g à n arêtes)

$$\#\mathbf{Q}_n^0 = \frac{2}{n+2} 3^n \text{Cat}_n \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} 12^n n^{-5/2} \quad [\text{Tutte 1963}]$$

$$\#\mathbf{Q}_n^g \sim t_g 12^n n^{-5\chi(g)/4} \quad [\text{Bender \& Canfield 1986}]$$

Résultats d'énumération

Théorème

Arbres plans enracinés (cartes à une face) à n arêtes :

$$\#\mathbf{T}_n = \text{Cat}_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi}} n^{-3/2}.$$

Soit \mathbf{Q}_n^g l'ensemble des **quadrangulations biparties** enracinées, de genre g , à n faces (\sim cartes enracinées de genre g à n arêtes)

$$\#\mathbf{Q}_n^0 = \frac{2}{n+2} 3^n \text{Cat}_n \sim \frac{2}{\sqrt{\pi}} 12^n n^{-5/2} \quad [\text{Tutte 1963}]$$

$$\#\mathbf{Q}_n^g \sim t_g 12^n n^{-5\chi(g)/4} \quad [\text{Bender \& Canfield 1986}]$$

Comment compter les cartes ?

- Équations récursives sur les fonctions génératrices, et utilisation de la **méthode quadratique** de Tutte
- Calculs d'**intégrales de matrices gaussiennes** fournissant les fonctions génératrices de cartes en tout genre [t'Hooft 1974, Brézin, Itzykson, Parisi & Zuber 1978]
- Énumération de factorisations de permutations, de revêtements ramifiés [Goulden-Jackson 2008]
- Liens avec les *hiérarchies intégrables* de la géométrie algébrique (Eynard, Lando & Zvonkin)
- **Approches bijectives** [Cori-Vauquelin 1981, Schaeffer 1998, Chapuy-Marcus-Schaeffer 2008]

Comment compter les cartes ?

- Équations récursives sur les fonctions génératrices, et utilisation de la **méthode quadratique** de Tutte
- Calculs d'**intégrales de matrices gaussiennes** fournissant les fonctions génératrices de cartes en tout genre [t'Hooft 1974, Brézin, Itzykson, Parisi & Zuber 1978]
- Énumération de factorisations de permutations, de revêtements ramifiés [Goulden-Jackson 2008]
- Liens avec les *hiérarchies intégrables* de la géométrie algébrique (Eynard, Lando & Zvonkin)
- **Approches bijectives** [Cori-Vauquelin 1981, Schaeffer 1998, Chapuy-Marcus-Schaeffer 2008]

Comment compter les cartes ?

- Équations récursives sur les fonctions génératrices, et utilisation de la **méthode quadratique** de Tutte
- Calculs d'**intégrales de matrices gaussiennes** fournissant les fonctions génératrices de cartes en tout genre [t'Hooft 1974, Brézin, Itzykson, Parisi & Zuber 1978]
- Énumération de factorisations de permutations, de revêtements ramifiés [Goulden-Jackson 2008]
- Liens avec les *hiérarchies intégrables* de la géométrie algébrique (Eynard, Lando & Zvonkin)
- **Approches bijectives** [Cori-Vauquelin 1981, Schaeffer 1998, Chapuy-Marcus-Schaeffer 2008]

Comment compter les cartes ?

- Équations récursives sur les fonctions génératrices, et utilisation de la **méthode quadratique** de Tutte
- Calculs d'**intégrales de matrices gaussiennes** fournissant les fonctions génératrices de cartes en tout genre [t'Hooft 1974, Brézin, Itzykson, Parisi & Zuber 1978]
- Énumération de factorisations de permutations, de revêtements ramifiés [Goulden-Jackson 2008]
- Liens avec les *hiérarchies intégrables* de la géométrie algébrique (Eynard, Lando & Zvonkin)
- **Approches bijectives** [Cori-Vauquelin 1981, Schaeffer 1998, Chapuy-Marcus-Schaeffer 2008]

Intérêt des méthodes bijectives

La discrétisation de la **2DQG** des physiciens stipule qu'une grande carte, prise au hasard, approche une surface aléatoire [Ambjørn *et al.* 90's]). Idée générale :

- Les méthodes bijectives permettent de coder les cartes à l'aide de **structures arborescentes** dont la limite d'échelle est « facile » à étudier.
- En retour, ces limites d'échelle permettent de donner une information sur les limites des cartes.
- En particulier, ces méthodes permettent de garder la trace des distances de graphe à un sommet distingué.
- Par de telles méthodes, [Chassaing & Schaeffer, 2004] montrent que la distance typique entre deux sommets d'une quadrangulation plane à n faces est d'ordre $n^{1/4}$. La limite d'échelle de cette distance a une loi explicite faisant intervenir le support de la mesure **ISE** (Integrated Super-Brownian Excursion).



Intérêt des méthodes bijectives

La discrétisation de la **2DQG** des physiciens stipule qu'une grande carte, prise au hasard, approche une surface aléatoire [Ambjørn *et al.* 90's]). Idée générale :

- Les méthodes bijectives permettent de coder les cartes à l'aide de **structures arborescentes** dont la limite d'échelle est « facile » à étudier.
- En retour, ces limites d'échelle permettent de donner une information sur les limites des cartes.
- En particulier, ces méthodes permettent de garder la trace des distances de graphe à un sommet distingué.
- Par de telles méthodes, [Chassaing & Schaeffer, 2004] montrent que la distance typique entre deux sommets d'une quadrangulation plane à n faces est d'ordre $n^{1/4}$. La limite d'échelle de cette distance a une loi explicite faisant intervenir le support de la mesure **ISE** (Integrated Super-Brownian Excursion).



Intérêt des méthodes bijectives

La discrétisation de la **2DQG** des physiciens stipule qu'une grande carte, prise au hasard, approche une surface aléatoire [Ambjørn *et al.* 90's]). Idée générale :

- Les méthodes bijectives permettent de coder les cartes à l'aide de **structures arborescentes** dont la limite d'échelle est « facile » à étudier.
- En retour, ces limites d'échelle permettent de donner une information sur les limites des cartes.
- En particulier, ces méthodes permettent de garder la trace des distances de graphe à un sommet distingué.
- Par de telles méthodes, [Chassaing & Schaeffer, 2004] montrent que la distance typique entre deux sommets d'une quadrangulation plane à n faces est d'ordre $n^{1/4}$. La limite d'échelle de cette distance a une loi explicite faisant intervenir le support de la mesure **ISE** (Integrated Super-Brownian Excursion).



Intérêt des méthodes bijectives

La discrétisation de la **2DQG** des physiciens stipule qu'une grande carte, prise au hasard, approche une surface aléatoire [Ambjørn *et al.* 90's]). Idée générale :

- Les méthodes bijectives permettent de coder les cartes à l'aide de **structures arborescentes** dont la limite d'échelle est « facile » à étudier.
- En retour, ces limites d'échelle permettent de donner une information sur les limites des cartes.
- En particulier, ces méthodes permettent de garder la trace des distances de graphe à un sommet distingué.
- Par de telles méthodes, [Chassaing & Schaeffer, 2004] montrent que la distance typique entre deux sommets d'une quadrangulation plane à n faces est d'ordre $n^{1/4}$. La limite d'échelle de cette distance a une loi explicite faisant intervenir le support de la mesure **ISE** (Integrated Super-Brownian Excursion).



Un résultat plausible

Soit \mathbf{Q}_n^g l'ensemble des quadrangulations biparties de genre g , enracinées, à n faces, et \mathbf{q}_n un élément de loi uniforme dans cet ensemble. On munit l'ensemble $V_n = V(\mathbf{q}_n)$ de ses sommets de la distance de graphe d_{gr} .

On s'attend à ce que

$$(V(\mathbf{q}_n), n^{-1/4} d_{\text{gr}}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (S, d),$$

où (S, d) est un **espace métrique aléatoire**.

Une conjecture pour la forme de l'espace limite apparaît dans [Marckert & Mokkadem 2006], [Le Gall 2007] dans le cas $g = 0$.

Un résultat plausible

Soit \mathbf{Q}_n^g l'ensemble des quadrangulations biparties de genre g , enracinées, à n faces, et \mathbf{q}_n un élément de loi uniforme dans cet ensemble. On munit l'ensemble $V_n = V(\mathbf{q}_n)$ de ses sommets de la distance de graphe d_{gr} .

On s'attend à ce que

$$(V(\mathbf{q}_n), n^{-1/4} d_{\text{gr}}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (S, d),$$

où (S, d) est un **espace métrique aléatoire**.

Une conjecture pour la forme de l'espace limite apparaît dans [Marckert & Mokkadem 2006], [Le Gall 2007] dans le cas $g = 0$.

Un résultat plausible

Soit \mathbf{Q}_n^g l'ensemble des quadrangulations biparties de genre g , enracinées, à n faces, et \mathbf{q}_n un élément de loi uniforme dans cet ensemble. On munit l'ensemble $V_n = V(\mathbf{q}_n)$ de ses sommets de la distance de graphe d_{gr} .

On s'attend à ce que

$$(V(\mathbf{q}_n), n^{-1/4} d_{\text{gr}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (S, d),$$

où (S, d) est un **espace métrique aléatoire**.

Une conjecture pour la forme de l'espace limite apparaît dans [Marckert & Mokkadem 2006], [Le Gall 2007] dans le cas $g = 0$.

Un résultat plausible

Soit \mathbf{Q}_n^g l'ensemble des quadrangulations biparties de genre g , enracinées, à n faces, et \mathbf{q}_n un élément de loi uniforme dans cet ensemble. On munit l'ensemble $V_n = V(\mathbf{q}_n)$ de ses sommets de la distance de graphe d_{gr} .

On s'attend à ce que

$$(V(\mathbf{q}_n), n^{-1/4} d_{\text{gr}}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (S, d),$$

où (S, d) est un **espace métrique aléatoire**.

Une conjecture pour la forme de l'espace limite apparaît dans [Marckert & Mokkadem 2006], [Le Gall 2007] dans le cas $g = 0$.

Topologies sur les espaces métriques

Un cadre naturel pour travailler avec des espaces métriques aléatoires est de comparer deux espaces à l'aide de la **distance de Gromov-Hausdorff**. Soient $(X, d), (X', d')$ métriques compacts, et

$$d_{\text{GH}}(X, X') = \inf_{\phi, \phi'} \delta_H(\phi(X), \phi'(X')),$$

où l'infimum est pris sur tous les plongements isométriques de X, X' dans un espace métrique commun (Z, δ) et δ_H est la distance de Hausdorff entre compacts de Z .

Proposition

Ceci munit l'espace \mathbb{M} des classes d'isométrie d'espaces métriques compacts d'une distance complète et séparable.

Topologies sur les espaces métriques

Un cadre naturel pour travailler avec des espaces métriques aléatoires est de comparer deux espaces à l'aide de la **distance de Gromov-Hausdorff**. Soient $(X, d), (X', d')$ métriques compacts, et

$$d_{\text{GH}}(X, X') = \inf_{\phi, \phi'} \delta_H(\phi(X), \phi'(X')),$$

où l'infimum est pris sur tous les plongements isométriques de X, X' dans un espace métrique commun (Z, δ) et δ_H est la distance de Hausdorff entre compacts de Z .

Proposition

Ceci munit l'espace \mathbb{M} des classes d'isométrie d'espaces métriques compacts d'une distance complète et séparable.

Topologies sur les espaces métriques

Un cadre naturel pour travailler avec des espaces métriques aléatoires est de comparer deux espaces à l'aide de la **distance de Gromov-Hausdorff**. Soient $(X, d), (X', d')$ métriques compacts, et

$$d_{\text{GH}}(X, X') = \inf_{\phi, \phi'} \delta_H(\phi(X), \phi'(X')),$$

où l'infimum est pris sur tous les plongements isométriques de X, X' dans un espace métrique commun (Z, δ) et δ_H est la distance de Hausdorff entre compacts de Z .

Proposition

Ceci munit l'espace \mathbb{M} des classes d'isométrie d'espaces métriques compacts d'une distance complète et séparable.

Topologies sur les espaces métriques

Un cadre naturel pour travailler avec des espaces métriques aléatoires est de comparer deux espaces à l'aide de la **distance de Gromov-Hausdorff**. Soient $(X, d), (X', d')$ métriques compacts, et

$$d_{\text{GH}}(X, X') = \inf_{\phi, \phi'} \delta_H(\phi(X), \phi'(X')),$$

où l'infimum est pris sur tous les plongements isométriques de X, X' dans un espace métrique commun (Z, δ) et δ_H est la distance de Hausdorff entre compacts de Z .

Proposition

Ceci munit l'espace \mathbb{M} des classes d'isométrie d'espaces métriques compacts d'une distance complète et séparable.

Topologies sur les espaces métriques

Un cadre naturel pour travailler avec des espaces métriques aléatoires est de comparer deux espaces à l'aide de la **distance de Gromov-Hausdorff**. Soient $(X, d), (X', d')$ métriques compacts, et

$$d_{\text{GH}}(X, X') = \inf_{\phi, \phi'} \delta_H(\phi(X), \phi'(X')),$$

où l'infimum est pris sur tous les plongements isométriques de X, X' dans un espace métrique commun (Z, δ) et δ_H est la distance de Hausdorff entre compacts de Z .

Proposition

Ceci munit l'espace \mathbb{M} des classes d'isométrie d'espaces métriques compacts d'une distance complète et séparable.

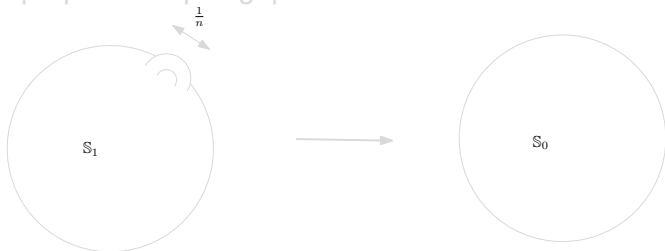
Convergence de Gromov-Hausdorff

- La topologie de Gromov-Hausdorff est puissante car flexible, comme la convergence faible. Ex. : un espace est bien approché par un de ses ε -réseaux. La convergence pour d_{GH} préserve certaines conditions « fermées », comme « être un arbre » ou « être un espace géodésique ».
- Attention, les propriétés topologiques et de dimension sont mal



Convergence de Gromov-Hausdorff

- La topologie de Gromov-Hausdorff est puissante car flexible, comme la convergence faible. Ex. : un espace est bien approché par un de ses ε -réseaux. La convergence pour d_{GH} préserve certaines conditions « fermées », comme « être un arbre » ou « être un espace géodésique ».
- Attention, les propriétés topologiques et de dimension sont mal



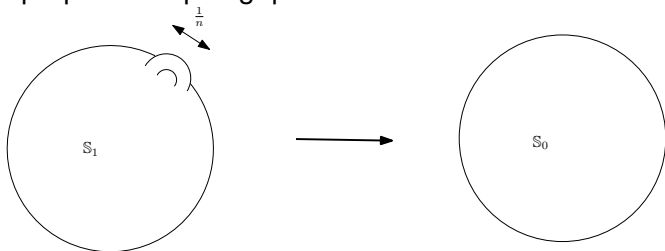
Convergence de Gromov-Hausdorff

- La topologie de Gromov-Hausdorff est puissante car flexible, comme la convergence faible. Ex. : un espace est bien approché par un de ses ε -réseaux. La convergence pour d_{GH} préserve certaines conditions « fermées », comme « être un arbre » ou « être un espace géodésique ».
- Attention, les propriétés topologiques et de dimension sont mal



Convergence de Gromov-Hausdorff

- La topologie de Gromov-Hausdorff est puissante car flexible, comme la convergence faible. Ex. : un espace est bien approché par un de ses ε -réseaux. La convergence pour d_{GH} préserve certaines conditions « fermées », comme « être un arbre » ou « être un espace géodésique ».
- Attention, les propriétés topologiques et de dimension sont mal



préservées.

Un théorème de sphéricité

Considérons le résultat suivant, dû à [Le Gall 2007], [Le Gall & Paulin, 2008].

Théorème

*On suppose $g = 0$. Les lois des (classes d'isométrie des) espaces $(V_n, n^{-1/4} d_{\text{gr}})$ sont **tendues**, comme lois sur l'espace $(\mathbb{M}, d_{\text{GH}})$. De plus, tout point limite pour la convergence faible est une mesure portée par les espaces métriques homéomorphes à la sphère.*

Le Gall & Paulin obtiennent ce résultat par un raisonnement sur les espaces « continus », nous considérons une approche différente, qui dépend davantage des espaces discrets dont la limite est issue.

Un théorème de sphéricité

Considérons le résultat suivant, dû à [Le Gall 2007], [Le Gall & Paulin, 2008].

Théorème

*On suppose $g = 0$. Les lois des (classes d'isométrie des) espaces $(V_n, n^{-1/4} d_{\text{gr}})$ sont **tendues**, comme lois sur l'espace $(\mathbb{M}, d_{\text{GH}})$.*

De plus, tout point limite pour la convergence faible est une mesure portée par les espaces métriques homéomorphes à la sphère.

Le Gall & Paulin obtiennent ce résultat par un raisonnement sur les espaces « continus », nous considérons une approche différente, qui dépend davantage des espaces discrets dont la limite est issue.

Un théorème de sphéricité

Considérons le résultat suivant, dû à [Le Gall 2007], [Le Gall & Paulin, 2008].

Théorème

*On suppose $g = 0$. Les lois des (classes d'isométrie des) espaces $(V_n, n^{-1/4} d_{\text{gr}})$ sont **tendues**, comme lois sur l'espace $(\mathbb{M}, d_{\text{GH}})$. De plus, tout point limite pour la convergence faible est une mesure portée par les espaces métriques homéomorphes à la sphère.*

Le Gall & Paulin obtiennent ce résultat par un raisonnement sur les espaces « continus », nous considérons une approche différente, qui dépend davantage des espaces discrets dont la limite est issue.

Un théorème de sphéricité

Considérons le résultat suivant, dû à [Le Gall 2007], [Le Gall & Paulin, 2008].

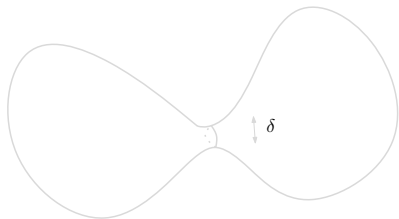
Théorème

*On suppose $g = 0$. Les lois des (classes d'isométrie des) espaces $(V_n, n^{-1/4} d_{\text{gr}})$ sont **tendues**, comme lois sur l'espace $(\mathbb{M}, d_{\text{GH}})$. De plus, tout point limite pour la convergence faible est une mesure portée par les espaces métriques homéomorphes à la sphère.*

Le Gall & Paulin obtiennent ce résultat par un raisonnement sur les espaces « continus », nous considérons une approche différente, qui dépend davantage des espaces discrets dont la limite est issue.

Convergence régulière

Whyburn (1935) a donné un critère pour que la topologie sphérique soit préservée par la convergence au sens de Hausdorff.



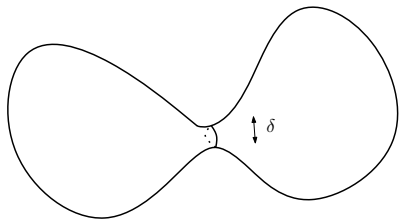
Proposition

Soit $\mathcal{X}_n \rightarrow \mathcal{X}$ dans $(\mathbb{M}, d_{\text{GH}})$, où $\mathcal{X}_n, n \geq 1$ est un espace métrique géodésique homéomorphe à la sphère de dimension 2. On

suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ, N tels que pour $n \geq N$, toute boucle γ dans \mathcal{X}_n de diamètre $\leq \delta$ est contractible dans son ε -voisinage. Alors \mathcal{X} est homéomorphe à la sphère de dimension 2, ou est un singleton.

Convergence régulière

Whyburn (1935) a donné un critère pour que la topologie sphérique soit préservée par la convergence au sens de Hausdorff.



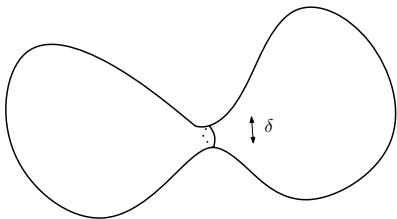
Proposition

Soit $\mathcal{X}_n \rightarrow \mathcal{X}$ dans $(\mathbb{M}, d_{\text{GH}})$, où $\mathcal{X}_n, n \geq 1$ est un espace métrique géodésique homéomorphe à la sphère de dimension 2. On

suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ, N tels que pour $n \geq N$, toute boucle γ dans \mathcal{X}_n de diamètre $\leq \delta$ est contractible dans son ε -voisinage. Alors \mathcal{X} est homéomorphe à la sphère de dimension 2, ou est un singleton.

Convergence régulière

Whyburn (1935) a donné un critère pour que la topologie sphérique soit préservée par la convergence au sens de Hausdorff.



Proposition

Soit $\mathcal{X}_n \rightarrow \mathcal{X}$ dans $(\mathbb{M}, d_{\text{GH}})$, où $\mathcal{X}_n, n \geq 1$ est un espace métrique géodésique homéomorphe à la sphère de dimension 2. On

suppose que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe δ, N tels que pour $n \geq N$, toute boucle γ dans \mathcal{X}_n de diamètre $\leq \delta$ est contractible dans son ε -voisinage. Alors \mathcal{X} est homéomorphe à la sphère de dimension 2, ou est un singleton.

La bijection de Schaeffer

- Soit \mathbf{T}_n l'ensemble des arbres plans à n arêtes
- et \mathbb{T}_n celui des arbres étiquetés (\mathbf{t}, ℓ) où $\ell : V(\mathbf{t}) \rightarrow \mathbb{Z}$ vérifie $\ell(\text{root}) = 1$ et

$$|\ell(u) - \ell(v)| \leq 1, \quad u, v \text{ voisins.}$$

- On note $\overline{\mathbb{T}}_n$ l'ensemble des $(\mathbf{t}, \ell) \in \mathbb{T}_n$ pour lequel $\ell \geq 1$ (arbres bien-étiquetés).

Théorème

La construction qui suit est une bijection entre $\overline{\mathbb{T}}_n$ et \mathbb{Q}_n .

La bijection de Schaeffer

- Soit \mathbf{T}_n l'ensemble des arbres plans à n arêtes
- et \mathbb{T}_n celui des arbres étiquetés (\mathbf{t}, ℓ) où $\ell : V(\mathbf{t}) \rightarrow \mathbb{Z}$ vérifie $\ell(\text{root}) = 1$ et

$$|\ell(u) - \ell(v)| \leq 1, \quad u, v \text{ voisins.}$$

- On note $\overline{\mathbb{T}}_n$ l'ensemble des $(\mathbf{t}, \ell) \in \mathbb{T}_n$ pour lequel $\ell \geq 1$ (arbres bien-étiquetés).

Théorème

La construction qui suit est une bijection entre $\overline{\mathbb{T}}_n$ et \mathbb{Q}_n .

La bijection de Schaeffer

- Soit \mathbf{T}_n l'ensemble des arbres plans à n arêtes
- et \mathbb{T}_n celui des arbres étiquetés (\mathbf{t}, ℓ) où $\ell : V(\mathbf{t}) \rightarrow \mathbb{Z}$ vérifie $\ell(\text{root}) = 1$ et

$$|\ell(u) - \ell(v)| \leq 1, \quad u, v \text{ voisins.}$$

- On note $\overline{\mathbb{T}}_n$ l'ensemble des $(\mathbf{t}, \ell) \in \mathbb{T}_n$ pour lequel $\ell \geq 1$ (**arbres bien-étiquetés**).

Théorème

La construction qui suit est une bijection entre $\overline{\mathbb{T}}_n$ et \mathbb{Q}_n .

La bijection de Schaeffer

- Soit \mathbf{T}_n l'ensemble des arbres plans à n arêtes
- et \mathbb{T}_n celui des arbres étiquetés (\mathbf{t}, ℓ) où $\ell : V(\mathbf{t}) \rightarrow \mathbb{Z}$ vérifie $\ell(\text{root}) = 1$ et

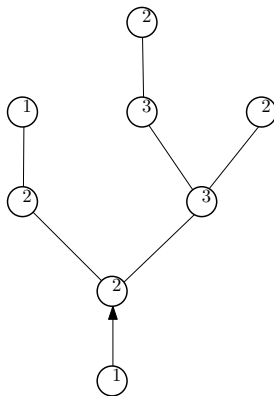
$$|\ell(u) - \ell(v)| \leq 1, \quad u, v \text{ voisins.}$$

- On note $\overline{\mathbb{T}}_n$ l'ensemble des $(\mathbf{t}, \ell) \in \mathbb{T}_n$ pour lequel $\ell \geq 1$ (**arbres bien-étiquetés**).

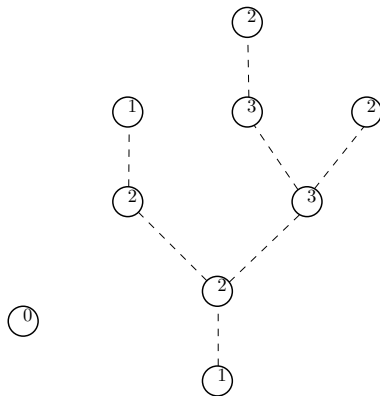
Théorème

La construction qui suit est une bijection entre $\overline{\mathbb{T}}_n$ et \mathbf{Q}_n .

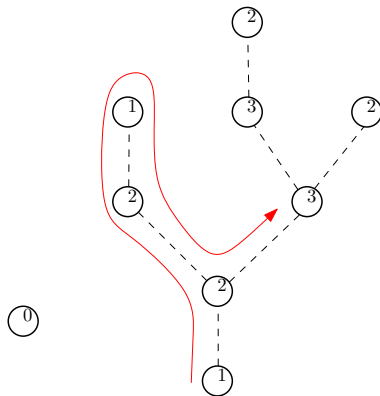
La bijection de Schaeffer



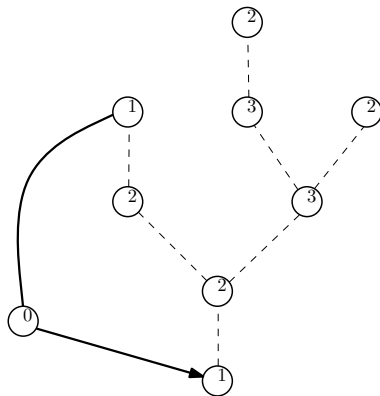
La bijection de Schaeffer



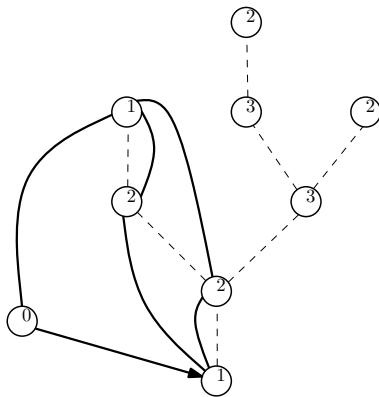
La bijection de Schaeffer



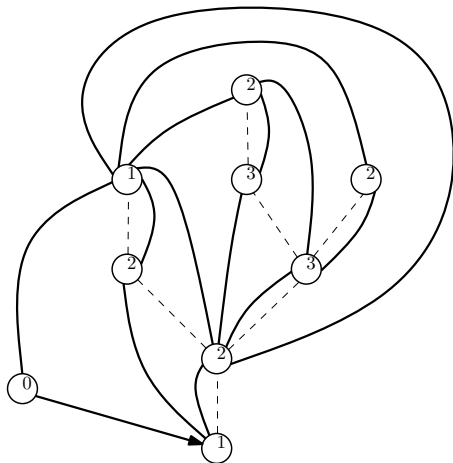
La bijection de Schaeffer



La bijection de Schaeffer



La bijection de Schaeffer



Noter que les étiquettes sont les distances géodésiques de la carte qui résulte

Limite des arbres plans : l'arbre continu brownien

L'arbre continu brownien (Aldous 1991) apparaît comme limite de nombreux modèles discrets d'arbres aléatoires, dont un élément T_n de loi uniforme sur \mathbf{T}_n :

$$(V(T_n), (2n)^{-1/2}d_{\text{gr}}) \rightarrow \mathcal{T},$$

pour la distance de Gromov-Hausdorff. Voici une construction.

- On construit \mathcal{T}_0 comme un \mathbb{R} -arbre, en greffant les extrémités gauches des segments obtenus en coupant l'axe \mathbb{R}_+ à l'aide des atomes d'une mesure de Poisson d'intensité tdt , le greffon étant placé récursivement à un endroit uniforme de la structure construite à l'étape courante.
- Soit \mathcal{T} la classe d'isométrie de la complétion métrique de \mathcal{T}° .
- \mathcal{T} peut aussi se construire à l'aide d'une excursion brownienne normalisée, d'où son nom [Aldous 1993], [Le Gall 1993].

Limite des arbres plans : l'arbre continu brownien

L'arbre continu brownien (Aldous 1991) apparaît comme limite de nombreux modèles discrets d'arbres aléatoires, dont un élément T_n de loi uniforme sur \mathbf{T}_n :

$$(V(T_n), (2n)^{-1/2} d_{\text{gr}}) \rightarrow \mathcal{T},$$

pour la distance de Gromov-Hausdorff. Voici une construction.

- On construit \mathcal{T}_0 comme un **\mathbb{R} -arbre**, en greffant les extrémités gauches des segments obtenus en coupant l'axe \mathbb{R}_+ à l'aide des atomes d'une mesure de Poisson d'intensité $t dt$, le greffon étant placé récursivement à un endroit uniforme de la structure construite à l'étape courante.
- Soit \mathcal{T} la classe d'isométrie de la complétion métrique de \mathcal{T}° .
- \mathcal{T} peut aussi se construire à l'aide d'une excursion brownienne normalisée, d'où son nom [Aldous 1993], [Le Gall 1993].

Limite des arbres plans : l'arbre continu brownien

L'arbre continu brownien (Aldous 1991) apparaît comme limite de nombreux modèles discrets d'arbres aléatoires, dont un élément T_n de loi uniforme sur \mathbf{T}_n :

$$(V(T_n), (2n)^{-1/2}d_{\text{gr}}) \rightarrow \mathcal{T},$$

pour la distance de Gromov-Hausdorff. Voici une construction.

- On construit \mathcal{T}_0 comme un **\mathbb{R} -arbre**, en greffant les extrémités gauches des segments obtenus en coupant l'axe \mathbb{R}_+ à l'aide des atomes d'une mesure de Poisson d'intensité tdt , le greffon étant placé récursivement à un endroit uniforme de la structure construite à l'étape courante.
- Soit \mathcal{T} la classe d'isométrie de la complétion métrique de \mathcal{T}° .
- \mathcal{T} peut aussi se construire à l'aide d'une excursion brownienne normalisée, d'où son nom [Aldous 1993], [Le Gall 1993].

Limite des arbres plans : l'arbre continu brownien

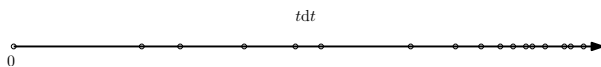
L'arbre continu brownien (Aldous 1991) apparaît comme limite de nombreux modèles discrets d'arbres aléatoires, dont un élément T_n de loi uniforme sur \mathbf{T}_n :

$$(V(T_n), (2n)^{-1/2} d_{\text{gr}}) \rightarrow \mathcal{T},$$

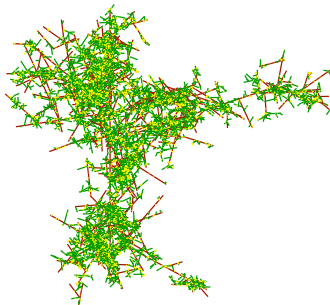
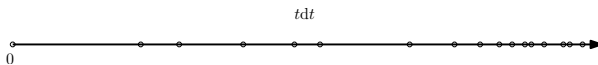
pour la distance de Gromov-Hausdorff. Voici une construction.

- On construit \mathcal{T}_0 comme un \mathbb{R} -arbre, en greffant les extrémités gauches des segments obtenus en coupant l'axe \mathbb{R}_+ à l'aide des atomes d'une mesure de Poisson d'intensité $t dt$, le greffon étant placé récursivement à un endroit uniforme de la structure construite à l'étape courante.
- Soit \mathcal{T} la classe d'isométrie de la complétion métrique de \mathcal{T}° .
- \mathcal{T} peut aussi se construire à l'aide d'une excursion brownienne normalisée, d'où son nom [Aldous 1993], [Le Gall 1993].

Des images !



Des images !



Étiquettes browniennes sur l'arbre brownien

- L'arbre étant donné, on fait courir un **bruit blanc** dessus, c'est-à-dire des chemins browniens branchants.
- Informellement, Z est un processus gaussien centré sur \mathcal{T} , de covariance

$$\text{Cov}(Z_a, Z_b) = d_{\mathcal{T}}(\text{root}, a \wedge b),$$

$a \wedge b$ le plus récent ancêtre commun à a, b .

Étiquettes browniennes sur l'arbre brownien

- L'arbre étant donné, on fait courir un **bruit blanc** dessus, c'est-à-dire des chemins browniens branchants.
- Informellement, Z est un processus gaussien centré sur \mathcal{T} , de covariance

$$\text{Cov}(Z_a, Z_b) = d_{\mathcal{T}}(\text{root}, a \wedge b),$$

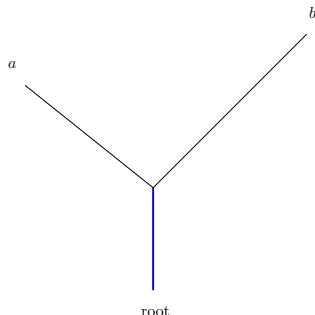
$a \wedge b$ le plus récent ancêtre commun à a, b .

Étiquettes browniennes sur l'arbre brownien

- L'arbre étant donné, on fait courir un **bruit blanc** dessus, c'est-à-dire des chemins browniens branchants.
- Informellement, Z est un processus gaussien centré sur \mathcal{T} , de covariance

$$\text{Cov}(Z_a, Z_b) = d_{\mathcal{T}}(\text{root}, a \wedge b),$$

$a \wedge b$ le plus récent ancêtre commun à a, b .



Convergence des arbres étiquetés

- Si (T_n, L_n) est uniforme dans \mathbb{T}_n , alors

$$\left(\frac{1}{(2n)^{1/2}} T_n, \left(\frac{9}{8n} \right)^{1/4} L_n \right) \longrightarrow (\mathcal{T}, \mathcal{Z})$$

- Si (\bar{T}_n, \bar{L}_n) est uniforme dans $\bar{\mathbb{T}}_n$, alors

$$\left(\frac{1}{(2n)^{1/2}} \bar{T}_n, \left(\frac{9}{8n} \right)^{1/4} \bar{L}_n \right) \longrightarrow (\bar{\mathcal{T}}, \bar{\mathcal{Z}}),$$

l'arbre brownien avec des étiquettes browniennes, **conditionnées à être positives**.

- Ce dernier est le « même » arbre $(\mathcal{T}, \mathcal{Z})$, mais **ré-enraciné** au point a_* où Z atteint son infimum [Le Gall & Weill, 2005].

Convergence des arbres étiquetés

- Si (T_n, L_n) est uniforme dans \mathbb{T}_n , alors

$$\left(\frac{1}{(2n)^{1/2}} T_n, \left(\frac{9}{8n} \right)^{1/4} L_n \right) \longrightarrow (\mathcal{T}, \mathcal{Z})$$

- Si (\bar{T}_n, \bar{L}_n) est uniforme dans $\bar{\mathbb{T}}_n$, alors

$$\left(\frac{1}{(2n)^{1/2}} \bar{T}_n, \left(\frac{9}{8n} \right)^{1/4} \bar{L}_n \right) \longrightarrow (\bar{\mathcal{T}}, \bar{\mathcal{Z}}),$$

l'arbre brownien avec des étiquettes browniennes, **conditionnées à être positives**.

- Ce dernier est le « même » arbre $(\mathcal{T}, \mathcal{Z})$, mais **ré-enraciné** au point a_* où \mathcal{Z} atteint son infimum [Le Gall & Weill, 2005].

Convergence des arbres étiquetés

- Si (T_n, L_n) est uniforme dans \mathbb{T}_n , alors

$$\left(\frac{1}{(2n)^{1/2}} T_n, \left(\frac{9}{8n} \right)^{1/4} L_n \right) \longrightarrow (\mathcal{T}, \mathcal{Z})$$

- Si (\bar{T}_n, \bar{L}_n) est uniforme dans $\bar{\mathbb{T}}_n$, alors

$$\left(\frac{1}{(2n)^{1/2}} \bar{T}_n, \left(\frac{9}{8n} \right)^{1/4} \bar{L}_n \right) \longrightarrow (\bar{\mathcal{T}}, \bar{\mathcal{Z}}),$$

l'arbre brownien avec des étiquettes browniennes, **conditionnées à être positives**.

- Ce dernier est le « même » arbre $(\mathcal{T}, \mathcal{Z})$, mais **ré-enraciné** au point a_* où Z atteint son infimum [Le Gall & Weill, 2005].

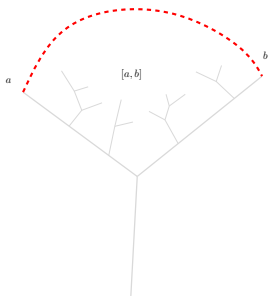
Identification des points à la limite

Partant de la convergence de l'arbre renormalisé (\bar{T}_n, \bar{L}_n) vers (\bar{T}, \bar{Z}) , soit $Q_n \in \mathbf{Q}_n$ codé par (\bar{T}_n, \bar{L}_n) , et supposons $(V(Q_n), n^{-1/4}d_{\text{gr}}) \rightarrow (S, d)$.

On se donne $a_n, b_n \in \bar{T}_n$ qui « convergent » vers $a, b \in \bar{T}$, et on identifie a_n, b_n avec des sommets de Q_n . Si

$$\bar{Z}_a = \bar{Z}_b = \inf_{[a,b]} \bar{Z},$$

alors a_n, b_n deviennent identifiés à la limite ($d_{\text{gr}}(a_n, b_n) = o(n^{1/4})$).



Un théorème de Le Gall montre que ce sont les **seules identifications** à faire : des points a_n, b_n de \bar{T}_n tels que $\bar{Z}_a + \bar{Z}_b - 2 \min_{[a,b]} \bar{Z} > 0$ sont éloignés dans l'échelle $n^{1/4}$.

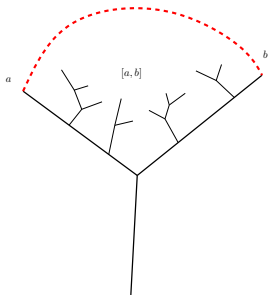
Identification des points à la limite

Partant de la convergence de l'arbre renormalisé (\bar{T}_n, \bar{L}_n) vers (\bar{T}, \bar{Z}) , soit $Q_n \in \mathbf{Q}_n$ codé par (\bar{T}_n, \bar{L}_n) , et supposons $(V(Q_n), n^{-1/4}d_{\text{gr}}) \rightarrow (S, d)$.

On se donne $a_n, b_n \in \bar{T}_n$ qui « convergent » vers $a, b \in \bar{T}$, et on identifie a_n, b_n avec des sommets de Q_n . Si

$$\bar{Z}_a = \bar{Z}_b = \inf_{[a,b]} \bar{Z},$$

alors a_n, b_n deviennent identifiés à la limite ($d_{\text{gr}}(a_n, b_n) = o(n^{1/4})$).



Un théorème de Le Gall montre que ce sont les **seules identifications** à faire : des points a_n, b_n de \bar{T}_n tels que $\bar{Z}_a + \bar{Z}_b - 2 \min_{[a,b]} \bar{Z} > 0$ sont éloignés dans l'échelle $n^{1/4}$.

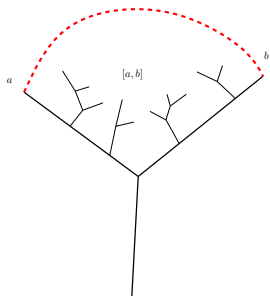
Identification des points à la limite

Partant de la convergence de l'arbre renormalisé (\bar{T}_n, \bar{L}_n) vers (\bar{T}, \bar{Z}) , soit $Q_n \in \mathbf{Q}_n$ codé par (\bar{T}_n, \bar{L}_n) , et supposons $(V(Q_n), n^{-1/4}d_{\text{gr}}) \rightarrow (S, d)$.

On se donne $a_n, b_n \in \bar{T}_n$ qui « convergent » vers $a, b \in \bar{T}$, et on identifie a_n, b_n avec des sommets de Q_n . Si

$$\bar{Z}_a = \bar{Z}_b = \inf_{[a,b]} \bar{Z},$$

alors a_n, b_n deviennent identifiés à la limite ($d_{\text{gr}}(a_n, b_n) = o(n^{1/4})$).

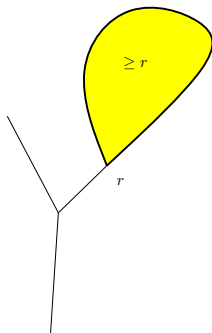


Un théorème de Le Gall montre que ce sont les **seules identifications** à faire : des points a_n, b_n de \bar{T}_n tels que $\bar{Z}_a + \bar{Z}_b - 2 \min_{[a,b]} \bar{Z} > 0$ sont éloignés dans l'échelle $n^{1/4}$.

Configurations interdites

Proposition

P.s. il n'existe aucun point a dans $\bar{\mathcal{T}}$ (hormis la racine) tel que $\bar{Z}_b \geq \bar{Z}_a$ pour tous les descendants de a .

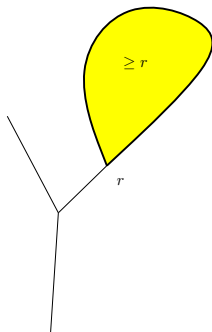


Ainsi, avec le résultat d'avant, on obtient que deux points $a_n, b_n \in \bar{\mathcal{T}}_n$ convergeant vers $a, b \in \bar{\mathcal{T}}$ où a est un ancêtre de b ne sont pas identifiés à la limite, c.à.d. sont éloignés dans l'échelle $n^{1/4}$.

Configurations interdites

Proposition

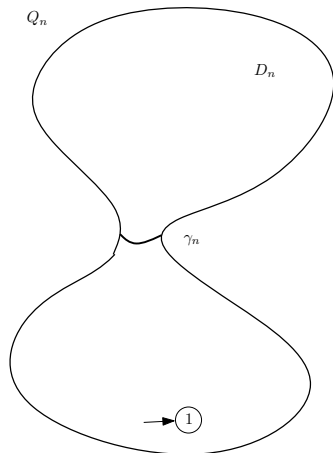
P.s. il n'existe aucun point a dans $\overline{\mathcal{T}}$ (hormis la racine) tel que $\overline{Z}_b \geq \overline{Z}_a$ pour tous les descendants de a .



Ainsi, avec le résultat d'avant, on obtient que deux points $a_n, b_n \in \overline{\mathcal{T}}_n$ convergeant vers $a, b \in \overline{\mathcal{T}}$ où **a est un ancêtre de b** ne sont **pas identifiés** à la limite, c.à.d. sont éloignés dans l'échelle $n^{1/4}$.

Preuve du théorème de sphéricité

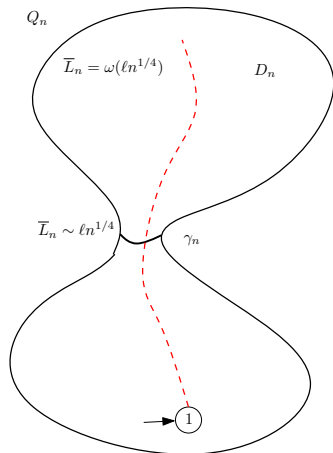
Supposons l'existence de boucles γ_n de longueur $o(n^{1/4})$ dans Q_n .



- 1 Soit D_n la composante séparée de la racine par γ_n .
- 2 L'arbre \bar{T}_n entre dans D_n , et à la limite toutes les étiquettes de D_n dont $\geq n^{1/4} \ell$
- 3 Pour éviter une configuration interdite, l'arbre quitte D_n après y être entré.
- 4 On trouve alors a_n ancêtre de b_n dans \bar{T}_n , mais à distance $o(n^{1/4})$ dans Q_n , et c'est exclu.

Preuve du théorème de sphéricité

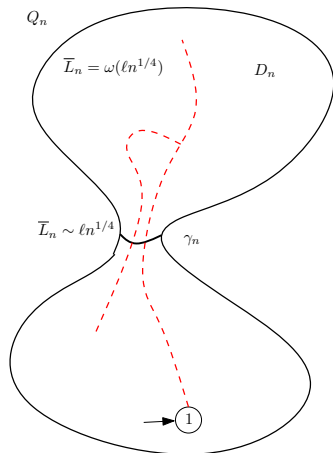
Supposons l'existence de boucles γ_n de longueur $o(n^{1/4})$ dans Q_n .



- 1 Soit D_n la composante séparée de la racine par γ_n .
- 2 L'arbre \bar{T}_n entre dans D_n , et à la limite toutes les étiquettes de D_n dont $\geq n^{1/4}\ell$
- 3 Pour éviter une configuration interdite, l'arbre quitte D_n après y être entré.
- 4 On trouve alors a_n ancêtre de b_n dans \bar{T}_n , mais à distance $o(n^{1/4})$ dans Q_n , et c'est exclu.

Preuve du théorème de sphéricité

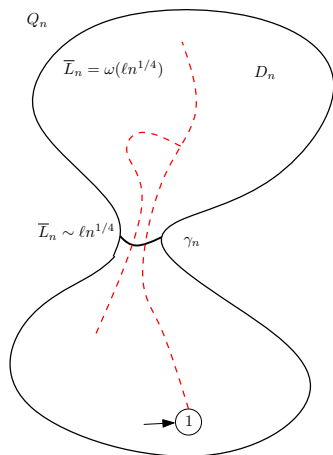
Supposons l'existence de boucles γ_n de longueur $o(n^{1/4})$ dans Q_n .



- 1 Soit D_n la composante séparée de la racine par γ_n .
- 2 L'arbre \bar{T}_n entre dans D_n , et à la limite toutes les étiquettes de D_n dont $\geq n^{1/4} \ell$
- 3 Pour éviter une configuration interdite, l'arbre quitte D_n après y être entré.
- 4 On trouve alors a_n ancêtre de b_n dans \bar{T}_n , mais à distance $o(n^{1/4})$ dans Q_n , et c'est exclu.

Preuve du théorème de sphéricité

Supposons l'existence de boucles γ_n de longueur $o(n^{1/4})$ dans Q_n .



- 1 Soit D_n la composante séparée de la racine par γ_n .
- 2 L'arbre \bar{T}_n entre dans D_n , et à la limite toutes les étiquettes de D_n dont $\geq n^{1/4} \ell$
- 3 Pour éviter une configuration interdite, l'arbre quitte D_n après y être entré.
- 4 On trouve alors a_n ancêtre de b_n dans \bar{T}_n , mais à distance $o(n^{1/4})$ dans Q_n , et c'est exclu.

Convergence de Gromov-Hausdorff-Prokhorov

Dans la fin de l'exposé, on s'intéressera aux **espaces métriques mesurés**. On étend la définition de d_{GH} aux classes d'isométries de (X, d, μ) où μ est une mesure borélienne sur (X, d) . La distance de Gromov-Hausdorff-Prokhorov est définie par

$$d_{GHP}(X, X') = \inf_{\phi, \phi'} \delta_H(\phi(X), \phi'(X')) \vee \delta_P(\phi_*\mu, \phi'_*\mu'),$$

l'infimum étant pris sur les isométries ϕ, ϕ' de X, X' dans un (Z, δ) , et δ_P est la distance de Prokhorov usuelle

$$\delta_P(\nu, \nu') = \inf\{\varepsilon : \nu(C) \leq \nu'(C^\varepsilon) + \varepsilon \text{ pour tout fermé } C\},$$

où $C^\varepsilon = \{x \in Z : \delta(x, C) < \varepsilon\}$.

Proposition

Ceci munit les classes d'espaces métriques mesurés \mathbb{M}^{wt} d'une métrique séparable, complète (voir aussi [Gromov, Fukaya, Evans-Winter]).

Convergence de Gromov-Hausdorff-Prokhorov

Dans la fin de l'exposé, on s'intéressera aux **espaces métriques mesurés**. On étend la définition de d_{GH} aux classes d'isométries de (X, d, μ) où μ est une mesure borélienne sur (X, d) . La distance de **Gromov-Hausdorff-Prokhorov** est définie par

$$d_{\text{GHP}}(X, X') = \inf_{\phi, \phi'} \delta_H(\phi(X), \phi'(X')) \vee \delta_P(\phi_*\mu, \phi'_*\mu'),$$

l'infimum étant pris sur les isométries ϕ, ϕ' de X, X' dans un (Z, δ) , et δ_P est la distance de Prokhorov usuelle

$$\delta_P(\nu, \nu') = \inf\{\varepsilon : \nu(C) \leq \nu'(C^\varepsilon) + \varepsilon \text{ pour tout fermé } C\},$$

où $C^\varepsilon = \{x \in Z : \delta(x, C) < \varepsilon\}$.

Proposition

Ceci munit les classes d'espaces métriques mesurés \mathbb{M}^{wt} d'une métrique séparable, complète (voir aussi [Gromov, Fukaya, Evans-Winter]).

Convergence de Gromov-Hausdorff-Prokhorov

Dans la fin de l'exposé, on s'intéressera aux **espaces métriques mesurés**. On étend la définition de d_{GH} aux classes d'isométries de (X, d, μ) où μ est une mesure borélienne sur (X, d) . La distance de **Gromov-Hausdorff-Prokhorov** est définie par

$$d_{\text{GHP}}(X, X') = \inf_{\phi, \phi'} \delta_H(\phi(X), \phi'(X')) \vee \delta_P(\phi_*\mu, \phi'_*\mu'),$$

l'infimum étant pris sur les isométries ϕ, ϕ' de X, X' dans un (Z, δ) , et δ_P est la distance de Prokhorov usuelle

$$\delta_P(\nu, \nu') = \inf\{\varepsilon : \nu(C) \leq \nu'(C^\varepsilon) + \varepsilon \text{ pour tout fermé } C\},$$

où $C^\varepsilon = \{x \in Z : \delta(x, C) < \varepsilon\}$.

Proposition

Ceci munit les classes d'espaces métriques mesurés \mathbb{M}^{wt} d'une métrique séparable, complète (voir aussi [Gromov, Fukaya, Evans-Winter]).

Convergence de Gromov-Hausdorff-Prokhorov

Dans la fin de l'exposé, on s'intéressera aux **espaces métriques mesurés**. On étend la définition de d_{GH} aux classes d'isométries de (X, d, μ) où μ est une mesure borélienne sur (X, d) . La distance de **Gromov-Hausdorff-Prokhorov** est définie par

$$d_{GHP}(X, X') = \inf_{\phi, \phi'} \delta_H(\phi(X), \phi'(X')) \vee \delta_P(\phi_*\mu, \phi'_*\mu'),$$

l'infimum étant pris sur les isométries ϕ, ϕ' de X, X' dans un (Z, δ) , et δ_P est la distance de Prokhorov usuelle

$$\delta_P(\nu, \nu') = \inf\{\varepsilon : \nu(C) \leq \nu'(C^\varepsilon) + \varepsilon \text{ pour tout fermé } C\},$$

où $C^\varepsilon = \{x \in Z : \delta(x, C) < \varepsilon\}$.

Proposition

Ceci munit les classes d'espaces métriques mesurés \mathbb{M}^{wt} d'une métrique séparable, complète (voir aussi [Gromov, Fukaya, Evans-Winter]).

On s'intéresse maintenant au genre $g \geq 0$ quelconque, mais aussi à des quadrangulations dont les tailles sont aléatoires, de lois de type **Boltzmann**. Soit $V_{\mathbf{q}} = \#V(\mathbf{q})$ (volume). On définit une mesure σ -finie

$$\mathcal{Q}^g(\{\mathbf{q}\}) = 12^{-\#F(\mathbf{q})}, \quad \mathbf{q} \in \mathbf{Q}^g := \bigcup_{n \geq 0} \mathbf{Q}_n^g,$$

et on pose, pour $\lambda > 0$,

$$\mathcal{P}_{\lambda}^g = \frac{\mathcal{Q}^g(V_{\mathbf{q}}^2 e^{-\lambda V_{\mathbf{q}}} d\mathbf{q})}{\mathcal{Q}^g(V_{\mathbf{q}}^2 e^{-\lambda V_{\mathbf{q}}})}.$$

On s'intéresse au régime où $\lambda \rightarrow 0$ (force $V_{\mathbf{q}}$ à être grand).

On s'intéresse maintenant au genre $g \geq 0$ quelconque, mais aussi à des quadrangulations dont les tailles sont aléatoires, de lois de type **Boltzmann**. Soit $V_{\mathbf{q}} = \#V(\mathbf{q})$ (volume). On définit une mesure σ -finie

$$\mathcal{Q}^g(\{\mathbf{q}\}) = 12^{-\#F(\mathbf{q})}, \quad \mathbf{q} \in \mathbf{Q}^g := \bigcup_{n \geq 0} \mathbf{Q}_n^g,$$

et on pose, pour $\lambda > 0$,

$$\mathcal{P}_\lambda^g = \frac{\mathcal{Q}^g(V_{\mathbf{q}}^2 e^{-\lambda V_{\mathbf{q}}} d\mathbf{q})}{\mathcal{Q}^g(V_{\mathbf{q}}^2 e^{-\lambda V_{\mathbf{q}}})}.$$

On s'intéresse au régime où $\lambda \rightarrow 0$ (force $V_{\mathbf{q}}$ à être grand).

On s'intéresse maintenant au genre $g \geq 0$ quelconque, mais aussi à des quadrangulations dont les tailles sont aléatoires, de lois de type **Boltzmann**. Soit $V_{\mathbf{q}} = \#V(\mathbf{q})$ (volume). On définit une mesure σ -finie

$$\mathcal{Q}^g(\{\mathbf{q}\}) = 12^{-\#F(\mathbf{q})}, \quad \mathbf{q} \in \mathbf{Q}^g := \bigcup_{n \geq 0} \mathbf{Q}_n^g,$$

et on pose, pour $\lambda > 0$,

$$\mathcal{P}_\lambda^g = \frac{\mathcal{Q}^g(V_{\mathbf{q}}^2 e^{-\lambda V_{\mathbf{q}}} d\mathbf{q})}{\mathcal{Q}^g(V_{\mathbf{q}}^2 e^{-\lambda V_{\mathbf{q}}})}.$$

On s'intéresse au régime où $\lambda \rightarrow 0$ (force $V_{\mathbf{q}}$ à être grand).

Unicité des géodésiques

On munit \mathbf{q} de la mesure

$$\mu_{\mathbf{q}} := \frac{1}{V_{\mathbf{q}}} \sum_{v \in V(\mathbf{q})} \delta_v.$$

Théorème

- 1 Fixons $\lambda > 0$. Les lois sur \mathbb{M}^{wt} des espaces $(V(\mathbf{q}), a^{-1/4} d_{\text{gr}}, \mu_{\mathbf{q}})$ sous $\mathcal{P}_{\lambda/a}^g$, avec $a > 1$, sont *tendues*.
- 2 Toute loi limite \mathcal{S}_{λ} est portée par les espaces (X, d, μ) t.q.
 - ▶ (X, d) est un *espace métrique géodésique*
 - ▶ μ est diffuse avec $\text{supp}(\mu) = X$
 - ▶ Pour $\mu \otimes \mu$ -presque-tout (x, y) , il existe un *unique chemin géodésique* entre x et y .

Voir aussi les récents travaux de Le Gall sur les géodésiques ($g=0$).



Unicité des géodésiques

On munit \mathbf{q} de la mesure

$$\mu_{\mathbf{q}} := \frac{1}{V_{\mathbf{q}}} \sum_{v \in V(\mathbf{q})} \delta_v.$$

Théorème

- 1 Fixons $\lambda > 0$. Les lois sur \mathbb{M}^{wt} des espaces $(V(\mathbf{q}), a^{-1/4}d_{\text{gr}}, \mu_{\mathbf{q}})$ sous $\mathcal{P}_{\lambda/a}^g$, avec $a > 1$, sont **tendues**.
- 2 Toute loi limite \mathcal{S}_{λ} est portée par les espaces (X, d, μ) t.q.
 - ▶ (X, d) est un **espace métrique géodésique**
 - ▶ μ est diffuse avec $\text{supp}(\mu) = X$
 - ▶ Pour $\mu \otimes \mu$ -presque-tout (x, y) , il existe un **unique chemin géodésique** entre x et y .

Voir aussi les récents travaux de Le Gall sur les géodésiques ($g=0$)



Unicité des géodésiques

On munit \mathbf{q} de la mesure

$$\mu_{\mathbf{q}} := \frac{1}{V_{\mathbf{q}}} \sum_{v \in V(\mathbf{q})} \delta_v.$$

Théorème

- 1 Fixons $\lambda > 0$. Les lois sur \mathbb{M}^{wt} des espaces $(V(\mathbf{q}), a^{-1/4}d_{\text{gr}}, \mu_{\mathbf{q}})$ sous $\mathcal{P}_{\lambda/a}^g$, avec $a > 1$, sont **tendues**.
- 2 Toute loi limite \mathcal{S}_{λ} est portée par les espaces (X, d, μ) t.q.
 - (X, d) est un **espace métrique géodésique**
 - μ est diffuse avec $\text{supp}(\mu) = X$
 - Pour $\mu \otimes \mu$ -presque-tout (x, y) , il existe un **unique chemin géodésique** entre x et y .

Voir aussi les récents travaux de Le Gall sur les géodésiques ($g=0$)



Unicité des géodésiques

On munit \mathbf{q} de la mesure

$$\mu_{\mathbf{q}} := \frac{1}{V_{\mathbf{q}}} \sum_{v \in V(\mathbf{q})} \delta_v.$$

Théorème

- 1 Fixons $\lambda > 0$. Les lois sur \mathbb{M}^{wt} des espaces $(V(\mathbf{q}), a^{-1/4}d_{\text{gr}}, \mu_{\mathbf{q}})$ sous $\mathcal{P}_{\lambda/a}^g$, avec $a > 1$, sont **tendues**.
- 2 Toute loi limite \mathcal{S}_{λ} est portée par les espaces (X, d, μ) t.q.
 - ▶ (X, d) est un **espace métrique géodésique**
 - ▶ μ est diffuse avec $\text{supp}(\mu) = X$
 - ▶ Pour $\mu \otimes \mu$ -presque-tout (x, y) , il existe un **unique chemin géodésique** entre x et y .

Voir aussi les récents travaux de Le Gall sur les géodésiques ($g=0$).



Unicité des géodésiques

On munit \mathbf{q} de la mesure

$$\mu_{\mathbf{q}} := \frac{1}{V_{\mathbf{q}}} \sum_{v \in V(\mathbf{q})} \delta_v.$$

Théorème

- 1 Fixons $\lambda > 0$. Les lois sur \mathbb{M}^{wt} des espaces $(V(\mathbf{q}), a^{-1/4}d_{\text{gr}}, \mu_{\mathbf{q}})$ sous $\mathcal{P}_{\lambda/a}^g$, avec $a > 1$, sont **tendues**.
- 2 Toute loi limite \mathcal{S}_{λ} est portée par les espaces (X, d, μ) t.q.
 - ▶ (X, d) est un **espace métrique géodésique**
 - ▶ μ est diffuse avec $\text{supp}(\mu) = X$
 - ▶ Pour $\mu \otimes \mu$ -presque-tout (x, y) , il existe un **unique chemin géodésique** entre x et y .

Voir aussi les récents travaux de Le Gall sur les géodésiques ($g=0$)



Unicité des géodésiques

On munit \mathbf{q} de la mesure

$$\mu_{\mathbf{q}} := \frac{1}{V_{\mathbf{q}}} \sum_{v \in V(\mathbf{q})} \delta_v.$$

Théorème

- 1 Fixons $\lambda > 0$. Les lois sur \mathbb{M}^{wt} des espaces $(V(\mathbf{q}), a^{-1/4}d_{\text{gr}}, \mu_{\mathbf{q}})$ sous $\mathcal{P}_{\lambda/a}^g$, avec $a > 1$, sont **tendues**.
- 2 Toute loi limite \mathcal{S}_{λ} est portée par les espaces (X, d, μ) t.q.
 - ▶ (X, d) est un **espace métrique géodésique**
 - ▶ μ est diffuse avec $\text{supp}(\mu) = X$
 - ▶ Pour $\mu \otimes \mu$ -presque-tout (x, y) , il existe un **unique chemin géodésique** entre x et y .

Voir aussi les récents travaux de Le Gall sur les géodésiques ($g=0$).



Discussion et perspectives

- 1 Unicité de la loi limite ?
- 2 La loi des distances mutuelles entre deux points [Chassaing-Schaeffer 04] ou trois points [Bouttier-Guitter 08] pris au hasard est connue, dans le cas $g = 0$. Plus généralement ?
- 3 Équivalent en genre supérieur du théorème de sphéricité (en cours).
- 4 Universalité : ces résultats devraient rester juste pour des familles de cartes beaucoup plus générales [Marckert-Miermont, Chapuy].

Discussion et perspectives

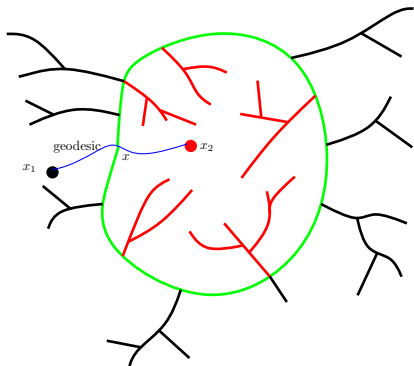
- 1 Unicité de la loi limite ?
- 2 La loi des distances mutuelles entre deux points [Chassaing-Schaeffer 04] ou trois points [Bouttier-Guitter 08] pris au hasard est connue, dans le cas $g = 0$. Plus généralement ?
- 3 Équivalent en genre supérieur du théorème de sphéricité (en cours).
- 4 Universalité : ces résultats devraient rester juste pour des familles de cartes beaucoup plus générales [Marckert-Miermont, Chapuy].

Discussion et perspectives

- 1 Unicité de la loi limite ?
- 2 La loi des distances mutuelles entre deux points [Chassaing-Schaeffer 04] ou trois points [Bouttier-Guitter 08] pris au hasard est connue, dans le cas $g = 0$. Plus généralement ?
- 3 Équivalent en genre supérieur du théorème de sphéricité (en cours).
- 4 Universalité : ces résultats devraient rester juste pour des familles de cartes beaucoup plus générales [Marckert-Miermont, Chapuy].

Discussion et perspectives

- 1 Unicité de la loi limite ?
- 2 La loi des distances mutuelles entre deux points [Chassaing-Schaeffer 04] ou trois points [Bouttier-Guitter 08] pris au hasard est connue, dans le cas $g = 0$. Plus généralement ?
- 3 Équivalent en genre supérieur du théorème de sphéricité (en cours).
- 4 Universalité : ces résultats devraient rester juste pour des familles de cartes beaucoup plus générales [Marckert-Miermont, Chapuy].



Merci de votre attention