

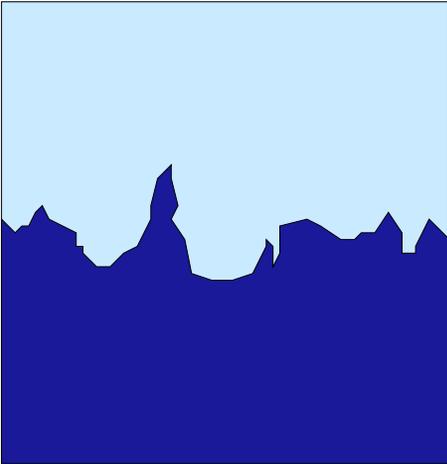
Répulsion entropique pour un modèle  
d'interfaces gaussien  
(en dimensions critiques et surcritiques)

Noemi Kurt  
Universität Zürich

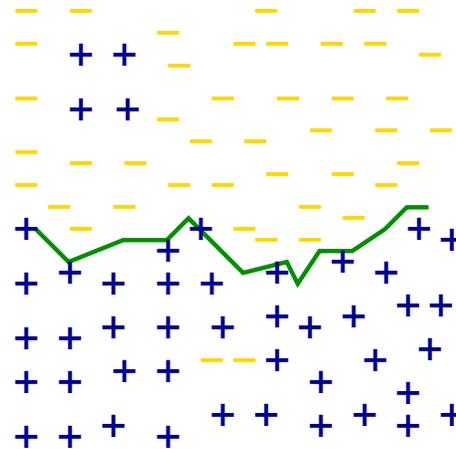
Journées de Probabilités  
Lille 2008

# Modèles d'interface

## 1. Eau et glace



## 2. Ferro-aimant

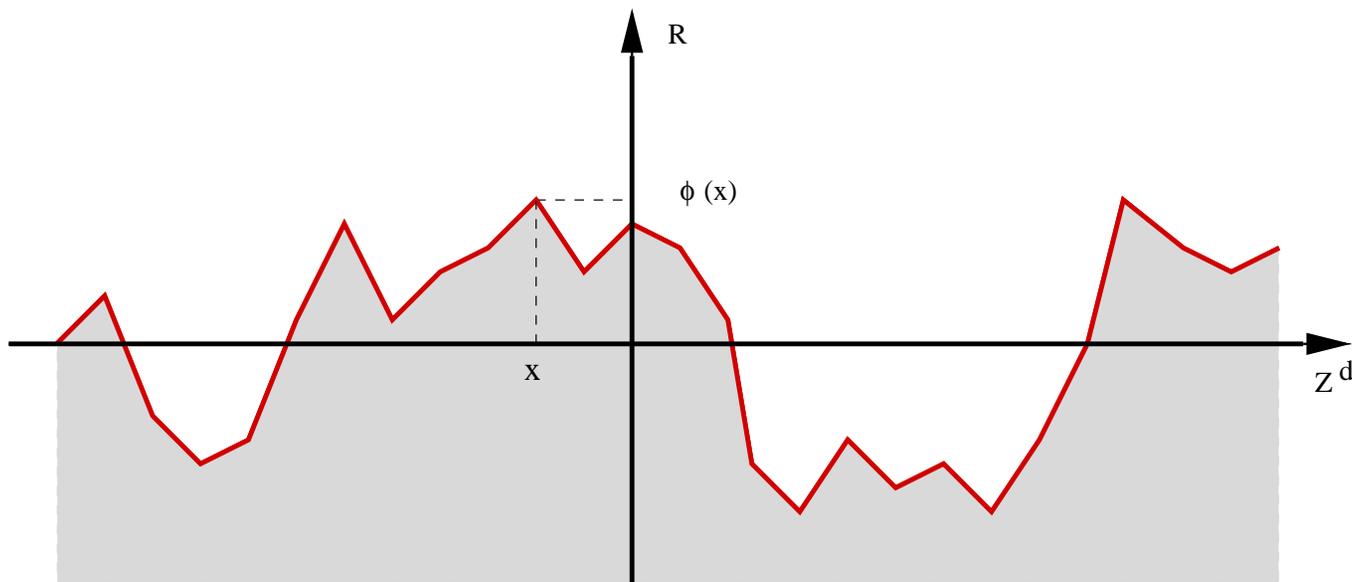


- Interface: région entre deux phases
- But: Etudier les phénomènes macroscopiques de l'interface (hauteur, courbure, fluctuations...) d'un point de vue microscopique

## Modèles d'interface

### Modèle de base

- Interface: Graphe d'une fonction  $\varphi : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{R}$
- $\varphi_x := \varphi(x)$  : Hauteur de l'interface au site  $x \in \mathbb{Z}^d$



## Modèles d'interface

### Modèle probabiliste

- $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ , topologie produit,  $\sigma$ -algèbre de Borel
- Réalisation  $\varphi = \{\varphi_x\}_{x \in \mathbb{Z}^d} \in \Omega$
- Domaine  $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$  fini,  $\varphi_x = 0 \forall x \in \Lambda^c$  (conditions au bord)
- Fonction d'énergie: **Hamiltonien**

$$H_\Lambda : \varphi \mapsto H_\Lambda(\varphi)$$

- **Mesure de probabilité**

$$P_\Lambda(d\varphi) := \frac{1}{Z_\Lambda} \exp(-H_\Lambda(\varphi)) \prod_{x \in \Lambda} d\varphi_x \prod_{x \in \Lambda^c} \delta_0(d\varphi_x).$$

( $Z_\Lambda$  normalisation,  $d\varphi_x$  mesure de Lebesgue,  $\delta_0$  mesure de Dirac).

## Modèle de membranes

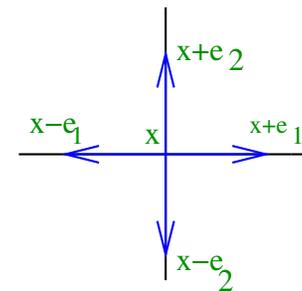
Hamiltonien du modèle de membranes:

$$H_{\Lambda}(\varphi) = \sum_{x \in \Lambda} (\Delta \varphi_x)^2,$$

où  $\Delta \varphi_x = \frac{1}{2d} \sum_{y: |x-y|=1} \varphi_y - \varphi_x$  est le laplacien discret.

Représentation:

$$\Delta(x, y) = \begin{cases} 1/(2d) & \text{si } |x - y| = 1, \\ -1 & \text{si } |x - y| = 0 \\ 0 & \text{autrement.} \end{cases}$$



Alors  $H_{\Lambda}(\varphi) = \sum_{x \in \Lambda} (\sum_{y \in \Lambda} \Delta(x, y) \varphi_y)^2$ .

Les configurations énergétiquement favorables du modèle de membranes sont celles avec courbure  $\approx$  constante.

## Modèle de membranes: Motivation

Modèle pour des membranes semiflexibles (ou des polymères semiflexibles):

$$\bar{H}_\Lambda(\varphi) = \sum_{x \in \Lambda} \left( \rho_1 |\nabla \varphi_x|^2 + \rho_2 (\Delta \varphi_x)^2 \right)$$

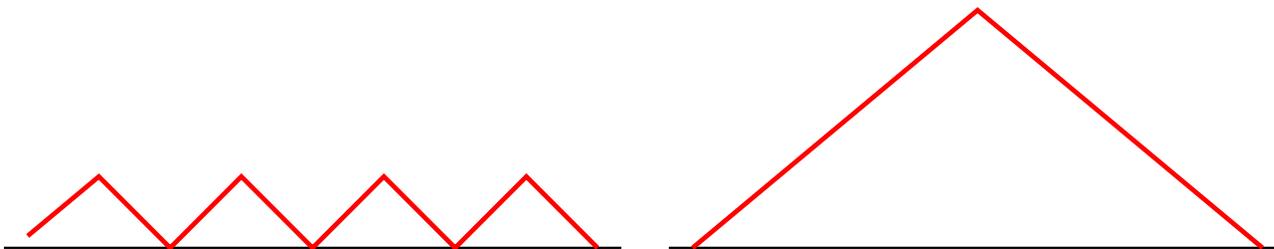
$\rho_1$  : tension latérale,  $\rho_2$  : rigidité de courbure.

Modèle de gradient:

$$\tilde{H}_\Lambda(\varphi) = \sum_{x \in \Lambda} |\nabla \varphi_x|^2 = \sum_{x \in \Lambda} \sum_{y: |x-y|=1} (\varphi_x - \varphi_y)^2$$

Ce modèle préfère les configurations constantes.

Comparaison:



## Modèle de membranes: Propriétés de base

- $P_\Lambda$  est le **champ gaussien centré** sur  $\Lambda$  avec **matrice de covariances**

$$G_\Lambda = (\Delta_\Lambda^2)^{-1}$$

où  $\Delta_\Lambda^2 = (\Delta^2(x, y))_{x, y \in \Lambda}$ . (Preuve: Sommation par parties)

## Modèle de membranes: Propriétés de base

- $P_\Lambda$  est le **champ gaussien centré** sur  $\Lambda$  avec **matrice de covariances**

$$G_\Lambda = (\Delta_\Lambda^2)^{-1}$$

où  $\Delta_\Lambda^2 = (\Delta^2(x, y))_{x, y \in \Lambda}$ . (Preuve: Somme par parties)

- $P_\Lambda$  est la mesure de Gibbs avec Hamiltonien  $H_\Lambda$ , donc pour  $A \subset \Lambda$ ,

$$P_\Lambda(\cdot | \mathcal{F}_{A^c})(\psi) = P_{A, \psi}(\cdot) \quad P_\Lambda(d\psi) - p.s.,$$

où  $P_{A, \psi}(d\varphi) := \frac{1}{Z_A} \exp(-H_\Lambda(\varphi)) \prod_{x \in A} d\varphi_x \prod_{x \in \Lambda \setminus A} \delta_{\psi_x}(d\varphi_x)$ .  
( $\mathcal{F}_{A^c} = \sigma(\varphi_x, x \in A^c)$  la  $\sigma$ -algèbre générée par  $\varphi_x, x \in A^c$ ).

## Modèle de membranes: Propriétés de base

- $P_\Lambda$  est le **champ gaussien centré** sur  $\Lambda$  avec **matrice de covariances**

$$G_\Lambda = (\Delta_\Lambda^2)^{-1}$$

où  $\Delta_\Lambda^2 = (\Delta^2(x, y))_{x, y \in \Lambda}$ . (Preuve: Sommation par parties)

- $P_\Lambda$  est la mesure de Gibbs avec Hamiltonien  $H_\Lambda$ , donc pour  $A \subset \Lambda$ ,

$$P_\Lambda(\cdot | \mathcal{F}_{A^c})(\psi) = P_{A, \psi}(\cdot) \quad P_\Lambda(d\psi) - p.s.,$$

où  $P_{A, \psi}(d\varphi) := \frac{1}{Z_A} \exp(-H_\Lambda(\varphi)) \prod_{x \in A} d\varphi_x \prod_{x \in \Lambda \setminus A} \delta_{\psi_x}(d\varphi_x)$ .  
( $\mathcal{F}_{A^c} = \sigma(\varphi_x, x \in A^c)$  la  $\sigma$ -algèbre générée par  $\varphi_x, x \in A^c$ ).

- **Volume infini.** Soit  $\Lambda_N \nearrow \mathbb{Z}^d$ . La limite

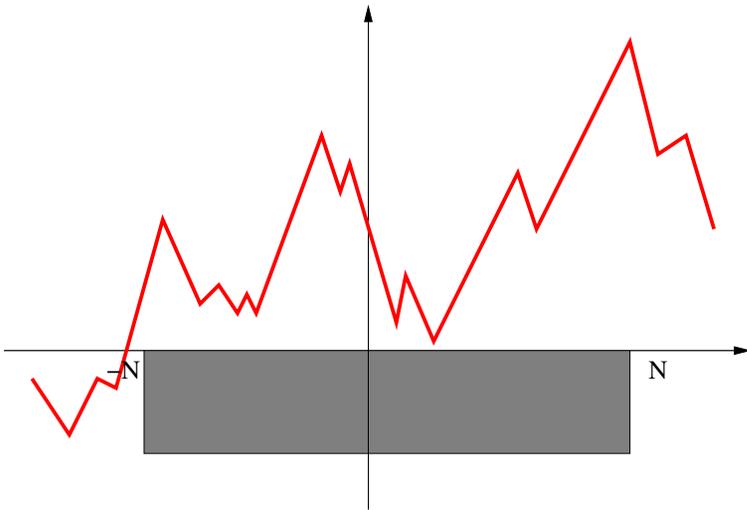
$$P := \lim_{N \rightarrow \infty} P_{\Lambda_N}$$

existe si et seulement si  $d \geq 5$ . Dans ce cas, elle est le champ gaussien centré sur  $\mathbb{Z}^d$  avec matrice de covariances  $\Delta^{-2}$ .

## Mur solide

Question: Quel est le comportement de l'interface si on impose une contrainte qui force l'interface à éviter une partie du domaine?

Soit  $D_N := [-N, N]^d \cap \mathbb{Z}^d$ , soit  $\Omega_N^+ := \{\varphi : \varphi_x \geq 0 \forall x \in D_N\}$ .



Question: Comportement de l'interface conditionnée sur  $\Omega_N^+$ ?

Résultats en  $d \geq 5$  (K., Stoch. Proc. Appl. 2007)

**Théorème 1** Soit  $d \geq 5$ . Soit  $G := \text{var}(\varphi_0)$ .

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{d-4} \log N} \log P(\Omega_N^+) = -4GC$$

avec  $C = \inf \left\{ \frac{1}{(2d)^2} \int_{\mathbb{R}^d} |\Delta h|^2 dx; h \in H^2(V), h \geq 1 \text{ sur } [-1, 1]^d \right\}$ .

Résultats en  $d \geq 5$  (K., Stoch. Proc. Appl. 2007)

**Théorème 1** Soit  $d \geq 5$ . Soit  $G := \text{var}(\varphi_0)$ .

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N^{d-4} \log N} \log P(\Omega_N^+) = -4GC$$

avec  $C = \inf \left\{ \frac{1}{(2d)^2} \int_{\mathbb{R}^d} |\Delta h|^2 dx; h \in H^2(V), h \geq 1 \text{ sur } [-1, 1]^d \right\}$ .

**Théorème 2** Soient  $d \geq 5$ , et  $\eta > 0$ . On a

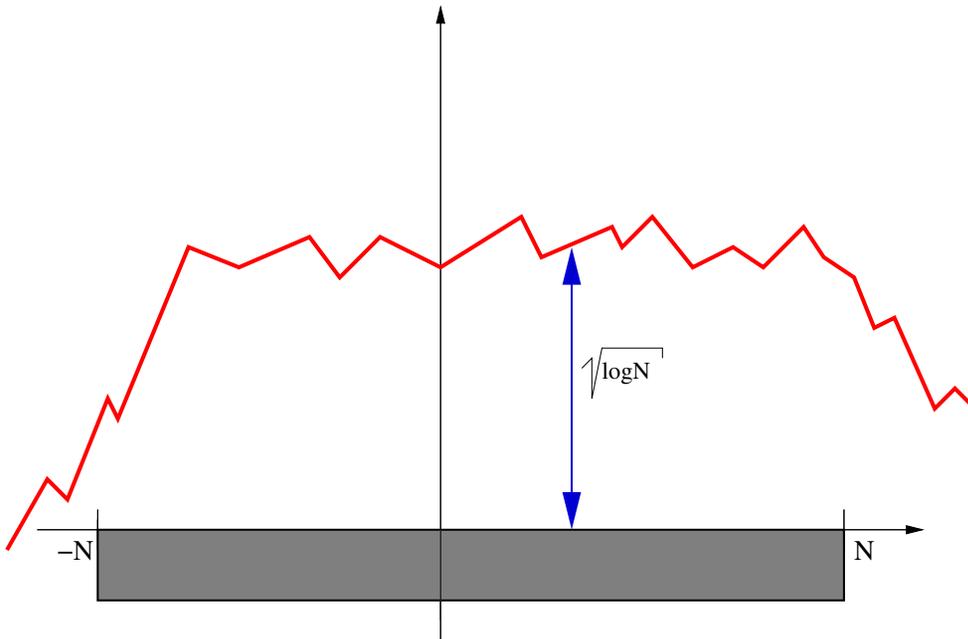
$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_x P \left( \left| \frac{\bar{\varphi}_x}{\sqrt{\log N}} - \sqrt{8G} \right| \geq \eta \mid \Omega_N^+ \right) = 0,$$

où  $\bar{\varphi}_x =$  moyenne locale des hauteurs

**Remarque:** Borne inférieure: Sakagawa, J. Math. Phys. 2003.

## Remarque: Répulsion entropique

Conditionnellement sur  $\Omega_N^+$ , la moyenne locale de l'interface est "poussée" à une hauteur d'ordre  $\sqrt{\log N}$



La répulsion est causée par les fluctuations de l'interface: effet "entropique".

Resultats en  $d = 4$  (K. 2008, à paraître dans Ann. Prob.)

Volume fini, domaine  $\Lambda_N$ , mur  $D_N \subset \Lambda_N$  avec distance  $\delta N$  du bord.

**Théorème 3** Soient  $d = 4$  et  $\gamma = \frac{8}{\pi^2}$ . Soit  $D \subset [-1, 1]^4$  et  $D_N = ND \cap \mathbb{Z}^4$ . On a

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(\log N)^2} \log P_{\Lambda_N}(\Omega_{D_N}^+) = -8\gamma \mathcal{C}(D),$$

où  $\mathcal{C}(D) = \inf\{\frac{1}{2} \int_{\Lambda} |\Delta h|^2 dx : h \in H_0(\Lambda), h \geq 1 \text{ p.p. sur } D\}$ .

**Théorème 4** Soit  $d = 4$ . Soit  $\eta > 0$ . Alors

$$\sup_{x \in D_N} \lim_{N \rightarrow \infty} P_{\Lambda_N}(\bar{\varphi}_x \leq (2\sqrt{2\gamma} - \eta) \log N \mid \Omega_{D_N}^+) = 0.$$

## Comparaison avec le modèle de gradient:

Des résultats correspondants pour le modèle de gradient ont été obtenus précédemment:

**Cas surcritique,  $d \geq 3$**  : Bolthausen, Deuschel, Zeitouni, Comm. Math. Phys 1995.

**Dimension critique,  $d = 2$** : Bolthausen, Deuschel, Giacomin, Ann. Prob. 2001.

**Preuves pour le modèle de gradient** utilisent de manière importante la représentation en marches aléatoires et les inégalités FKG, qui ne sont pas applicables pour le modèle de membranes.

## Approche

1. Déterminer les covariances
2. Borne inférieure du théorème 1: Analyser l'entropie relative d'une translation du champ de  $\sqrt{8G \log N}$ , bornes gaussiennes
3. Borne supérieure: Procédure de conditionnement sur des boîtes, utilisation de la propriété de Markov de la mesure de Gibbs, analyse de la distribution des espérances conditionnelles, bornes gaussiennes
4. Dimension critique: Analyse multi-échelles du maximum du champ

# 1. Covariances

## Volume infini

**Proposition** (Sakagawa 2003)  $d \geq 5$ . Alors

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{G(0, x)}{|x|^{4-d}} = \eta.$$

$$\eta = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^d} \exp\left(i\zeta \cdot \theta - \frac{1}{(2d)^2} |\theta|^4 t\right) d\theta dt, \text{ pour tous } \zeta \in \mathbb{S}^{d-1}.$$

Preuve: Via transformation de Fourier, méthode de Le Gall.

**Proposition: Représentation en marches aléatoires.**  $d \geq 5$ . Alors

$$G(x, y) = \mathbb{E}^{x,y} \left( \sum_{n,m=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_n=Y_m\}} \right)$$

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}, (Y_m)_{m \in \mathbb{N}}$  deux marches aléatoires simples indépendantes sur  $\mathbb{Z}^d$ ,  $\mathbb{E}^{x,y}$  leur espérance conditionnée à partir de  $x$  et  $y$  respectivement.

## Volume fini

Pour  $(x, y \in \Lambda_N)$  soit

$$R_N(x, y) := \mathbb{E}^{x, y} \left( \sum_{n=0}^{\tau_N} \sum_{m=0}^{\tau_N} \mathbf{1}_{\{X_n=Y_m\}} \right)$$

$X, Y$  marches aléatoires simples,  $\tau_N = \inf\{n \geq 0 : X_n \notin \Lambda_N\}$ .

Fait:  $R_N(x, y) \neq G_{\Lambda_N}(x, y)$

Mais:  $R_N(x, y) - G_{\Lambda_N}(x, y)$  satisfait un problème de valeurs au bord discret ( $x \in \Lambda_N$  fixé)

$$\begin{aligned} \Delta^2(R_N(x, y) - G_{\Lambda_N}(x, y)) &= 0, & y \in \Lambda_N \\ R_N(x, y) - G_{\Lambda_N}(x, y) &= R_N(x, y), & y \in \partial_2 \Lambda_N. \end{aligned}$$

## Volume fini

- $G_{\Lambda_N}(x, x) \leq R_N(x, x) \forall x \in \Lambda_N$
- $\sup_{y \in \Lambda_{\delta N}} |R_N(x, y) - G_{\Lambda_N}(x, y)| \leq c(d)N^{4-d}$   
if  $x \in \Lambda_{\delta N}, 0 < \delta < 1$   
via considérations sur la régularité des solutions de problèmes de valeurs au bord
- Bornes pour  $R_N(x, y)$  via le théorème de la limite locale pour des marches aléatoires simples

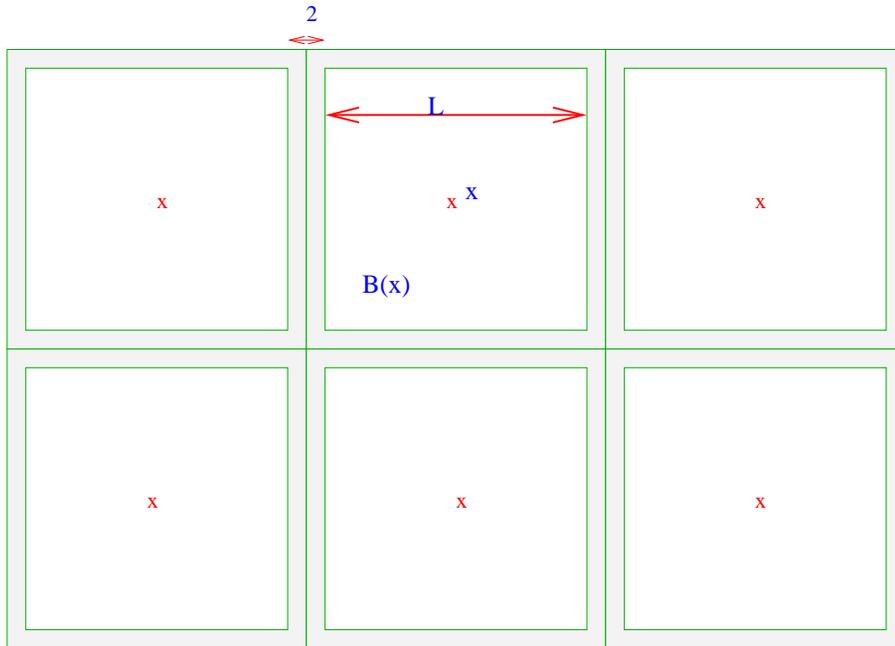
**Corollaire** Asymptotiquement en  $N$ ,

(a)  $d \geq 5, x \in \Lambda_{\delta N} : \text{var}_N(\varphi_x) = c(d) + O(N^{4-d})$

(b)  $d = 4, x \in \Lambda_{\delta N} : \text{var}_N(\varphi_x) = \gamma \log N + c(\delta) \left( \gamma = \frac{8}{\pi^2} \right)$

## Borne supérieure du théorème 1 ( $d \geq 5$ )

- Propriété de Markov:  $P(\cdot | \mathcal{F}_{B^c}) = P(\cdot | \mathcal{F}_{\partial_2 B})$ ,  $B \subset \Lambda_N$ .
- Diviser  $\Lambda_N$  en boîtes  $B(x)$  de longueur  $L$  et bords d'épaisseur  $\geq 2$ . Conditionnellement sur les bords, les variables à l'intérieur de boîtes différentes sont indépendantes .



- Soit  $m_x := E(\varphi_x | \mathcal{F}_{B(x)^c})$ ,  $x$  point milieu de  $B(x)$ .
- Notation:  $M$  ensemble des points milieu,  $R$  points du bord.

**Idée:**  $\varphi_x \approx m_x$ , les  $m_x$  sont des variables gaussiennes iid.

Argument de conditionnement:

$$P(\Omega_N^+) \leq E \left[ \prod_{x \in M} P(\varphi_x \geq 0 | \mathcal{F}_{\partial_2 B(x)}) \mathbf{1}_{\{\varphi_x \geq 0, x \in R\}} \right].$$

On montre que  $P \left( \frac{1}{B} \sum_x m_x < \sqrt{8 \text{var}(\varphi_0) \log N} \cap \Omega_N^+ \right)$  est négligeable (où  $B :=$  nombre de boîtes de la partition du réseau).

Autrement on trouve, si  $N \rightarrow \infty$ ,

$$P(\Omega_N^+) \approx P \left( \frac{1}{B} \sum_x m_x \geq \sqrt{8 \text{var}(\varphi_0) \log N} \right) \leq \exp \left( \frac{-4 \text{var} \log N}{\text{var}(\frac{1}{B} \sum m_x)} \right)$$

La décroissance de  $G(x, y)$  montre que  $\text{var}(\frac{1}{B} \sum m_x) \sim N^{4-d}$

Constante correcte: Optimiser sur le profil de hauteur.

## Autres dimensions:

$d = 1$  : Polymère semiflexible Caravenna et Deuschel: Pinning, mouillage. (Ann. Prob. 2007 et 2008)

$d = 2, 3$  : Pas de résultats connus, divergence des variances: Délocalisation de l'interface.

## Autres questions ouvertes:

Pinning, mouillage ( $d \geq 2$ ), construction de gouttes, dynamique...

## Références:

1. Noemi Kurt: Entropic repulsion for a class of Gaussian interface models in high dimensions, *Stoch. Proc. Appl.* 117 (2007), 23-34
2. Noemi Kurt: Maximum and entropic repulsion for a Gaussian membrane model in the critical dimension. To appear in *Annals of Probability*.

Disponibles sur [www.math.uzh.ch/user/noemi](http://www.math.uzh.ch/user/noemi)