Continuité des prix d'options dans des modèles de Lévy exponentiels

Suzanne Cawston, Angers

Journées de Probabilités, Lille

Le modèle

On considère un marché financier avec deux actifs :

- un actif non-risqué
$$R_t = R_0 e^{rt}$$
On prendra $R_0 = 1$ et $r = 0$.
- un actif risqué
$$S_t = S_0 e^{X_t}$$
où X est un processus de Lévy à valeurs réelles défini sur un espace $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$.
On supposera que $S_0 = 1$.

Processus de Lévy

- Les processus de Lévy sont les processus à accroissements indépendants et stationnaires.
- Pour tout $t \geq 0$ et $u \in \mathbb{R}$,

$$E(e^{iuX_t}) = (E(e^{iuX_1}))^t = exp(-t\psi(u))$$

avec

$$\psi(u) = ibu + \frac{c}{2}u^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{iux} - 1 - iuh(x))\nu(dx)$$

  - $b \in \mathbb{R}$ représente le drift
  - $c \in \mathbb{R}^+$ représente la volatilité
  - ν est une mesure qui vérifie

$$\int_{\mathbb{R}} (1 \wedge h^2(x))\nu(dx) < +\infty$$

  Elle représente les sauts du processus.

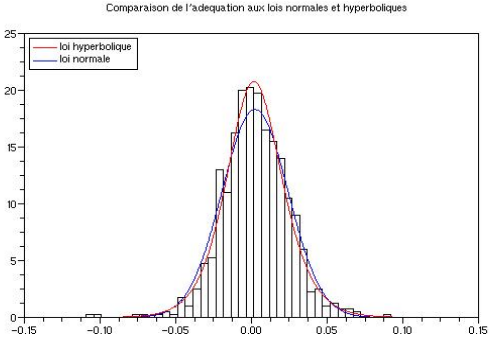
(b, c, ν) sont les caractéristiques du processus X.

Exemples

- Modèle de Black-Scholes
- Modèles Variance-Gamma (Madan-Seneta('90))
- Modèles CGMY (Carr-Geman-Madan-Yor('00))
- Modèles hyperboliques généralisés (Eberlein-Keller('95), Eberlein('01))

Propriétés des modèles de Lévy exponentiels

- Une bonne adéquation pour les log-retours



- Modèles avec des sauts (souvent purement discontinus)
- Modèles incomplets (une infinité de mesures martingales équivalentes)

Définition

On considère une option dont la fonction de payoff $g : \mathbb{D}([0,T]) \longrightarrow \mathbb{R}^+$ *est continue, d'échéance* T *et vérifie*

$$g(S) \le A \sup_{s\le T} S_s$$

pour un $A \ge 0$.

- Options européennes :

$$g(S) = (S_T - K)^+ \ / \ (K - S_T)^+$$

- Options asiatiques :

$$g(S) = (S_T - \frac{1}{T}\int_0^T S_s ds)^+ \ / \ (\frac{1}{T}\int_0^T S_s ds - S_T)^+$$

- Options lookback :

$$g(S) = (S_T - \alpha \inf_{s\le T} S_s)^+ \ / \ (\beta \sup_{s\le T} S_s - S_T)^+$$

Mesures martingales équivalentes

Soit Q une mesure équivalente à P sous laquelle

- S est une martingale
- X est encore un processus de Lévy

On associe à Q ses paramètres de Girsanov (β, Y).

$$\frac{dQ}{dP} = exp\{N_t - \frac{1}{2}\beta^2 ct + \sum_{0<s\leq t} \log(1+\Delta N_s) - \Delta N_s\}$$

et

$$N_t = \beta X_t^c + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (Y(x)-1)(\mu^X - \nu(dx)ds)$$

On associe alors à Q le prix $E_Q[g(S)]$.

La question

- Le prix dépend de la loi de X sous Q.
- Le théorème de Girsanov nous donne les caractéristiques de X sous Q.

Ainsi, le prix est une fonction de (b, c, ν, β, Y).

La question

Est-ce qu'une petite erreur sur un de ces paramètres peut conduire à une grande erreur sur le prix d'une option ?

Le cadre

On considère une suite de processus de Lévy $(X^n)_{n\geq 1}$ de caractéristiques (b^n, c^n, ν^n) et on suppose qu'il existe pour chaque S^n une mesure martingale équivalente Q^n de paramètres de Girsanov (β^n, Y^n).

On considère également un processus de Lévy X de caractéristiques (b, c, ν) et on suppose qu'il existe une mesure martingale équivalente Q de paramètres de Girsanov (β, Y).

Théorème

On suppose

$$(H1) \lim_{n\to+\infty} c^n + \int_{\mathbb{R}} h^2(x)Y^n(x)\nu^n(dx) = c + \int_{\mathbb{R}} h^2(x)Y(x)\nu(dx)$$

(H2) Pour toute fonction continue bornée ϕ telle que $\lim_{x\to 0} \frac{\phi(x)}{x} = 0$,

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1)\phi(x)Y^n(x)\nu^n(dx) = \int_{\mathbb{R}} (e^x - 1)\phi(x)Y(x)\nu(dx)$$

Alors, pour une échéance fixée $T \geq 0$ et une fonction de payoff continue g qui vérifie $g(S) \leq A \sup_{s\leq T} S_s$ pour un $A \geq 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} E_{Q^n}(g(S^n)) = E_Q(g(S))$$

Idée de preuve

- (H1) et (H2) entraînent

$$\mathcal{L}(X^n | Q^n) \longrightarrow \mathcal{L}(X|Q)$$

  et donc

$$\mathcal{L}(\sup_{s\leq T} X^n_s | Q^n) \longrightarrow \mathcal{L}(\sup_{s\leq T} X_s | Q)$$

On aimerait pouvoir en déduire

$$\lim_{n\rightarrow+\infty} E_{Q^n}(e^{\sup_{s\leq T} X^n_s}) = E_Q(e^{\sup_{s\leq T} X_s})$$

Idée de preuve (2)

Factorisation de Wiener-Hopf

Si τ est un temps exponentiel de paramètre $q > 0$ indépendant du processus de Lévy X, alors pour tout $u < 0$,

$$E(e^{u \sup_{s \leq \tau} X_s}) = \frac{E(e^{uX_\tau})}{E(e^{u \inf_{s \leq \tau} X_s})}$$

- Le fait que $E_{Q^n}(e^{X_t^n}) = 1$ permet ici d'étendre le résultat jusqu'à $u = 1$.

Idée de preuve (2)

Factorisation de Wiener-Hopf

Si τ est un temps exponentiel de paramètre $q > 0$ indépendant du processus de Lévy X, alors pour tout $u < 0$,

$$E(e^{u \sup_{s \leq \tau} X_s}) = \frac{E(e^{uX_\tau})}{E(e^{u \inf_{s \leq \tau} X_s})}$$

- Le fait que $E_{Q^n}(e^{X_t^n}) = 1$ permet ici d'étendre le résultat jusqu'à $u = 1$.
- On a donc

$$\begin{aligned}\lim_{n \to +\infty} E_{Q^n}(e^{\sup_{s \leq \tau} X_s^n}) &= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{E_{Q^n}(e^{\inf_{s \leq \tau} X_s^n})} \\ &= \frac{1}{E_Q(e^{\inf_{s \leq \tau} X_s})} = E_Q(e^{\sup_{s \leq \tau} X_s})\end{aligned}$$

Idée de preuve (2)

Factorisation de Wiener-Hopf

Si τ est un temps exponentiel de paramètre $q > 0$ indépendant du processus de Lévy X, alors pour tout $u < 0$,

$$E(e^{u \sup_{s \leq \tau} X_s}) = \frac{E(e^{uX_\tau})}{E(e^{u \inf_{s \leq \tau} X_s})}$$

- Le fait que $E_{Q^n}(e^{X_t^n}) = 1$ permet ici d'étendre le résultat jusqu'à $u = 1$.
- On a donc

$$\begin{aligned}\lim_{n \to +\infty} E_{Q^n}(e^{\sup_{s \leq \tau} X_s^n}) &= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{E_{Q^n}(e^{\inf_{s \leq \tau} X_s^n})} \\ &= \frac{1}{E_Q(e^{\inf_{s \leq \tau} X_s})} = E_Q(e^{\sup_{s \leq \tau} X_s})\end{aligned}$$

- On peut en déduire le résultat à un temps T déterministe.

Mesures de f-divergence minimale

Définition

Soient P et Q deux probabilités sur $(\Omega, \mathcal{F})$, Q a.c par rapport à P. Pour toute fonction f convexe vérifiant $f(1) = 0$, la f-divergence de Q à P est

$$I_f(Q, P) = E_P[f(\frac{dQ}{dP})]$$

- Entropie relative (Fujiwara-Miyahara ('98), Hubalek-Sgarra ('06))

$$f(x) = xlog(x)$$

- f^q-divergence (Jeanblanc, Klöppel, Miyahara ('07))

$$f(x) = x^q - 1, q < 0 \text{ ou } q > 1$$

- distance d'Hellinger (Choulli, Stricker, Li ('06))

$$f(x) = (\sqrt{x} - 1)^2$$

Dualité

Il existe une dualité entre des critères d'optimalité pour les stratégies et les prix obtenus pour des MMEs qui minimisent une f-divergence. (Goll-Rüschendorf('01), Bellini-Frittelli('02)....)

- Max. utilité exponentielle $\leftrightarrow$ Min. entropie relative

$$u(x) = 1 - e^{-x} \leftrightarrow f(x) = xlog(x)$$

- Max. fonction d'utilité puissance $\leftrightarrow$ Min. f^q-divergence

$$u(x) = \frac{q}{q-1} x^{\frac{q}{q-1}} \leftrightarrow f(x) = x^q - 1, q < 0$$

- Min. risque quadratique $\leftrightarrow$ Min. variance

Minimisation de l'entropie relative

On cherche la MME Q telle que $E_P(\frac{dQ}{dP}\log\frac{dQ}{dP})$ soit minimale.

Soit X un processus de Lévy de caractéristiques (b,c,ν). On considère la fonction

$$\tilde{\psi}(u) = (b+\frac{c}{2})u + \frac{c}{2}u^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{u(e^x-1)} - 1 - uh(x))\nu(dx)$$

définie sur $]-\infty, a)$ où $a = \sup\{u : \int_{x\geq 1} e^{u(e^x-1)}\nu(dx) < +\infty\}$
On a $a \geq 0$.

Minimisation de l'entropie relative

On cherche la MME Q telle que $E_P(\frac{dQ}{dP}\log\frac{dQ}{dP})$ soit minimale.

Soit X un processus de Lévy de caractéristiques (b, c, ν). On considère la fonction

$$\tilde{\psi}(u) = (b + \frac{c}{2})u + \frac{c}{2}u^2 + \int_{\mathbb{R}} (e^{u(e^x - 1)} - 1 - uh(x))\nu(dx)$$

définie sur $]-\infty, a)$ où $a = \sup\{u : \int_{x\geq 1} e^{u(e^x-1)}\nu(dx) < +\infty\}$
On a $a \geq 0$.

Théorème (Hubalek,Sgarra ('06))

$S = e^X$ admet une MME d'entropie minimale si et seulement si l'équation

$$\tilde{\psi}'(u) = 0$$

admet une solution θ.
Les paramètres de Girsanov de la mesure minimale sont alors $(\theta, e^{\theta(e^x-1)})$.

Les hypothèses

- On considère une option d'échéance T et de payoff g continu vérifiant $g(S) \leq A \sup_{s \leq T} S_s$, pour un $A \geq 0$.

Les hypothèses

- On considère une option d'échéance T et de payoff g continu vérifiant $g(S) \leq A \sup_{s \leq T} S_s$, pour un $A \geq 0$.
- On suppose que pour tout n, S^n admet une MME minimale Q^n. (ie $\tilde{\psi}^{n'}(u) = 0$ admet une solution θ^n).

Les hypothèses

- On considère une option d'échéance T et de payoff g continu vérifiant $g(S) \leq A \sup_{s \leq T} S_s$, pour un $A \geq 0$.
- On suppose que pour tout n, S^n admet une MME minimale Q^n. (ie $\tilde{\psi}^{n\prime}(u) = 0$ admet une solution θ^n).
- On suppose que
  - $\lim_{n \to +\infty} b^n = b$
  - $\lim_{n \to +\infty} c^n + \int_{\mathbb{R}} h^2(x) \nu^n(dx) = c + \int_{\mathbb{R}} h^2(x) \nu(dx)$
  - Pour toute fonction continue bornée ϕ négligeable devant x^2 au voisinage de 0,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \nu^n(dx) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \nu(dx)$$

Ceci équivaut à

$$\mathcal{L}(X^n | P^n) \longrightarrow \mathcal{L}(X | P)$$

Les hypothèses

- On considère une option d'échéance T et de payoff g continu vérifiant $g(S) \leq A \sup_{s \leq T} S_s$, pour un $A \geq 0$.
- On suppose que pour tout n, S^n admet une MME minimale Q^n. (ie $\tilde{\psi}^{n'}(u) = 0$ admet une solution θ^n).
- On suppose que
  - $\lim_{n \to +\infty} b^n = b$
  - $\lim_{n \to +\infty} c^n + \int_{\mathbb{R}} h^2(x) \nu^n(dx) = c + \int_{\mathbb{R}} h^2(x) \nu(dx)$
  - Pour toute fonction continue bornée ϕ négligeable devant x^2 au voisinage de 0,

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \nu^n(dx) = \int_{\mathbb{R}} \phi(x) \nu(dx)$$

  Ceci équivaut à

$$\mathcal{L}(X^n | P^n) \longrightarrow \mathcal{L}(X | P)$$

- Le modèle limite a-t-il une MME minimale ?
- Y a-t-il convergence des prix ?

Proposition

On note

$$\alpha = \sup\{u : \lim_{n \to +\infty} \int_{x \geq 1} e^{u(e^x - 1)} \nu^n(dx) < +\infty\}$$

- Si $\lim_{u \to \alpha} \tilde{\psi}'(u) \geq 0$*, il existe une MME Q d'entropie minimale pour S et on a*

$$\lim_{n \to +\infty} E_{Q^n}[g(S^n)] = E_Q[g(S)]$$

- Si $\lim_{u \to \alpha} \tilde{\psi}'(u) < 0$*, S peut ou peut ne pas avoir de mesure minimale. Dans tous les cas,*

$$\mathcal{L}(X^n | Q^n) \longrightarrow \mathcal{L}(X | P^*)$$

où P^* *est la mesure équivalente à P non-martingale donnée par les paramètres de Girsanov* $(\alpha, e^{\alpha(e^x - 1)})$*.*

Exemple 1 : convergence vers le modèle de Black-Scholes

Soit Y^n un processus NIG$(n, 0, n, 0)$ et Z^n un processus NIG$(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{n}, 0)$. On définit

$$X_t^n = bt + Y_t^n + Z_t^n$$

On a alors

$$\tilde{\psi}^n(u) = ub + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} (e^{u(e^x-1)} - 1 - uh(x)) \frac{n^2 K_1(n|x|) + \frac{1}{4*n} K_1(\frac{|x|}{4})}{|x|} dx$$

Exemple 1 : convergence vers le modèle de Black-Scholes

Soit Y^n un processus NIG$(n, 0, n, 0)$ et Z^n un processus NIG$(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{n}, 0)$. On définit

$$X_t^n = bt + Y_t^n + Z_t^n$$

On a alors

$$\tilde{\psi}^n(u) = ub + \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} (e^{u(e^x-1)} - 1 - uh(x)) \frac{n^2 K_1(n|x|) + \frac{1}{4*n}K_1(\frac{|x|}{4})}{|x|} dx$$

- Le processus limite est

$$X_t = bt + W_t$$

- Pour tout n,

$$\lim_{u \to -\infty} \tilde{\psi}^{n\prime}(u) = -\infty \text{ et } \lim_{u \to 0} \tilde{\psi}^{n\prime}(u) = +\infty$$

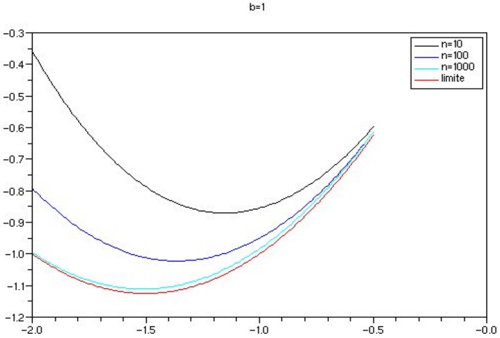
  S^n a donc une MME minimale et $\alpha = 0$.
- $\tilde{\psi}'(0) = b + \frac{1}{2}$.

Exemple 1 : premier cas

Si $b + \frac{1}{2} \geq 0$, on a (1er cas)

$$\lim_{n \to +\infty} E_{Q^n}(g(S^n)) = E_Q(g(S))$$

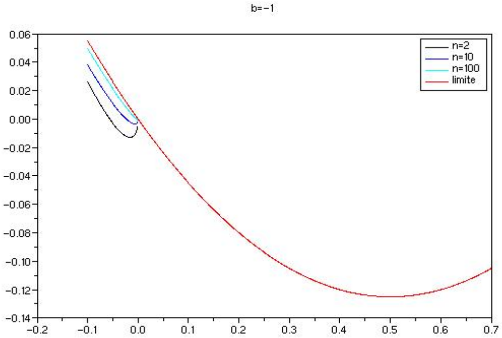
où Q est l'unique MME dans le modèle de Black-Scholes.



Exemple 1 : deuxième cas

Si $b + \frac{1}{2} < 0$, on a (2e cas)

$$\mathcal{L}(X^n|Q^n) \longrightarrow \mathcal{L}(X|P)$$



Exemple 1 : deuxième cas

Pour une option européenne de vente, le prix dans le modèle limite est

$$E_Q(K - S_T)^+ = K\Phi\left(\frac{\ln(K) + \frac{T}{2}}{\sqrt{T}}\right) - \Phi\left(\frac{\ln(K) - \frac{T}{2}}{\sqrt{T}}\right)$$

alors que

$$\lim_{n\to+\infty} E_{Q^n}(K - S_T^n)^+ = K\Phi\left(\frac{\ln(K) - bT}{\sqrt{T}}\right) - e^{(\frac{1}{2}+b)T}\Phi\left(\frac{\ln(K) - (b+1)T}{\sqrt{T}}\right)$$