Unicité de la mesure invariante pour les réseaux conducteurs de chaleur

Alain Camanes

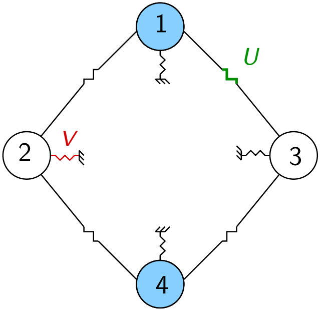
camanes-a@univ-nantes.fr

Laboratoire Jean Leray - Université de Nantes

Journées de probabilités - Lille 2008
$1-5$ *Septembre 2008*

Plan de l'exposé

Le réseau d'oscillateurs



$\circ$: Atomes

U : Potentiel d'interaction

V : Potentiel d'accrochage

q_i : Position de l'atome i

p_i : Quantité de mouvement de l'atome i

L'hamiltonien :

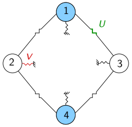
$$H(q,p) = \sum_i \frac{p_i^2}{2} + \sum_i \left(V(q_i) + \frac{1}{2} \sum_{j \sim i} U(q_i - q_j) \right)$$

Hypothèse : U, V polynômes pairs.

La dynamique

- Les équations différentielles stochastiques

$$\left\{\begin{aligned} dq_i &= \partial_{p_i} H \; dt \\ dp_i &= -\partial_{q_i} H \; dt + \dots \\ &\qquad + \left(-p_i \; dt + \sqrt{2T_i} \; dB_i\right) \mathbb{1}_{i \in \partial \mathcal{V}} \end{aligned}\right.$$



- Le générateur du semigroupe (P_t)

$$\mathcal{L} = \sum_{i \in \mathcal{V}} \partial_{p_i} H \, \partial_{q_i} - \partial_{q_i} H \, \partial_{p_i} - \sum_{i \in \partial \mathcal{V}} p_i \partial_{p_i} + \sum_{i \in \partial \mathcal{V}} T_i \partial_{p_i}^2 .$$

- Les mesures invariantes

$$\mathcal{L}^\star \mu = 0.$$

Un cas particulier

Lorsque les températures sont constantes, $T_i = T > 0, \forall i \in \partial\mathcal{V}$,

- L'adjoint du générateur

$$\mathcal{L}^\star = -\nabla_p H \cdot \nabla_q + \nabla_q H \cdot \nabla_p + \sum_{i\in\partial\mathcal{V}} p_i \partial_{p_i} + |\partial\mathcal{V}| + T \sum_{i\in\partial\mathcal{V}} \partial_{p_i}^2 .$$

- La mesure de Gibbs $(\beta = 1/T)$

$$\mu(dz) = \frac{e^{-\beta H}}{Z}\, dz,$$

est invariante

$$\mathcal{L}^\star \mu = 0.$$

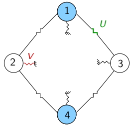
Plan de la partie

La condition d'asymétrie

- La matrice d'adjacence $\Lambda = (\Lambda_{ij})_{i,j}$:

$$\Lambda_{ij} = \delta_{i \sim j}.$$

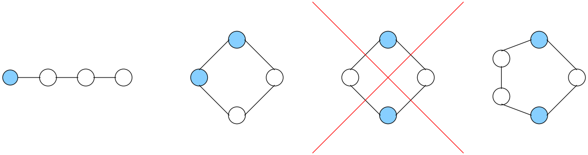
$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



- La condition d'asymétrie :

$$Vect\left\{\Lambda^k e_i,\ i \in \partial\mathcal{V}, k \in \mathbb{N}\right\} = \mathbb{R}^N.$$

- Exemples :



Asymétrie et unicité

On suppose ici que les potentiels sont harmoniques, c'est-à-dire que

$$U(x) = V(x) = \frac{x^2}{2}.$$

Théorème

Si le graphe $(G, \sim, \partial\mathcal{V})$ est asymétrique, il existe une unique mesure invariante et le taux de convergence est exponentiel.

Proposition

Supposons que $T_i = T > 0$, pour tout $i \in \partial\mathcal{V}$. Si le graphe n'est pas asymétrique, il existe une infinité de mesures invariantes.

Valeurs propres et complétude : Idée de la preuve

Théorème

Si le graphe $(G, \sim, \partial\mathcal{V})$ est asymétrique, il existe une unique mesure invariante et le taux de convergence est exponentiel.

On remarque que pour x, $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|P_t^\star \delta_x - P_t^\star \delta_y\| \leq \|DZ_t^{\cdot}\|(x).$$

Or, $J_t = DZ_t^x$ est solution de l'équation différentielle

$$dJ_t = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Lambda - D - I & -I_{\partial\mathcal{V}} \end{pmatrix} J_t \, dt.$$

Lorsque la condition d'asymétrie est satisfaite, la partie réelle des valeurs propres de M est négative et on a donc la majoration

$$\|P_t^\star \delta_x - P_t^\star \delta_y\| \leq Ce^{-\mu_0 t}.$$

On conclut en utilisant la complétude des espaces de Wasserstein.

Symétrie et non-unicité : Idée de la preuve

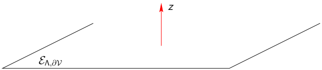
Proposition

Supposons que $T_i = T > 0$, pour tout $i \in \partial\mathcal{V}$. Si le graphe n'est pas asymétrique, il existe une infinité de mesures invariantes.

On exhibe une quantité invariante par le flot hamiltonien qui ne dépend pas des atomes du bord.

$$\mathcal{L}^\star f = -\{H, f\} + \sum_{i\in\partial\mathcal{V}} p_i \partial_{p_i} f + |\partial\mathcal{V}| f + \sum_{i\in\partial\mathcal{V}} T_i \partial_{p_i}^2 f .$$

Quantité conservée :
$K(q,p) = \langle z, p\rangle^2 + \alpha \langle z, q\rangle^2 ,$
$\Lambda z = \alpha z,\ \ z \notin \mathcal{E}_{\Lambda,\partial\mathcal{V}}$



Alors, pour toute constante $\gamma > 0$, la mesure suivante est une mesure invariante :

$$\frac{e^{-\beta H - \gamma K}}{Z}\, dz.$$

Plan de la partie

1. Modèle
2. Oscillateurs harmoniques
3. Régularité et support
   - Unicité et support
   - Régularité et Hörmander
   - Non-unicité et non-Hörmander
4. Support et contrôle
5. Lorsque des températures sont nulles
6. Perspectives

Régularité, support et unicité

- Support de μ

$$Supp\ \mu = \{z \in \mathbb{R}^n;\ \forall \epsilon > 0,\ \mu(\mathcal{B}(z,\epsilon)) > 0\}.$$

- (P_t) est dit fortement fellerien si

$$z \mapsto P_t f(z) \text{ est continue, } \forall\, t > 0,\ f \in \mathcal{M}_b.$$

Proposition (Hairer 2005)

Soit (P_t) fortement fellerien, μ à densité par rapport à Lebesgue.

$$\left.\begin{array}{l}\mathcal{L}^\star \mu = 0 \\ Supp\ \mu = \mathbb{R}^n\end{array}\right\} \Rightarrow \mu \text{ unique mesure invariante.}$$

Remarque : Pour des températures égales, cf. la mesure de Gibbs.

Condition d'Hörmander et régularité

- L'algèbre de Lie associée à la diffusion :

$$\mathfrak{L} = \left\{ \sum_j \partial_{p_j} H \partial_{q_j} - \partial_{q_j} H \, \partial_{p_j}, \, \partial_{p_i}, \; i \in \partial\mathcal{V} \right.$$

$$\left. + \text{ stabilité par crochet} \right\}.$$

Théorème (Hörmander)

Si pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, $\dim \mathfrak{L}(z) = n$, alors le semigroupe est fortement fellerien et toute mesure invariante μ est à densité C^∞ par rapport à la mesure de Lebesgue.

Remarque : Lorsque U, V sont harmoniques la condition d'asymétrie est équivalente à la condition d'Hörmander.

Non-Hörmander et non-unicité

On écrit le générateur sous la forme

$$\mathcal{L} = X_0 + \sum_{i \in \partial \mathcal{V}} T_i \partial_{p_i}^2.$$

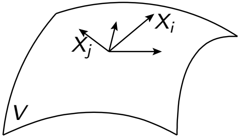
Théorème

Lorsque les potentiels sont analytiques et les températures égales, la condition d'Hörmander est équivalente à l'unicité de la mesure invariante.

On trouve une solution de la forme $u\mathbb{1}_V$ à l'équation

$$\mathcal{L}^\star(u\mathbb{1}_V) = 0.$$

$u\mathbb{1}_V$ est une solution non lisse et la mesure de Gibbs est une mesure invariante lisse.



Derridj 1975

Plan de la partie

Contrôlabilité et support

Système stochastique	Système déterministe
$dZ_t = f(Z_t)\ dt + \sigma \circ dB_t$	$\dot{z}_t = f(z_t) + \sigma\ u(t),\ u \in \mathcal{C}^{morc}$

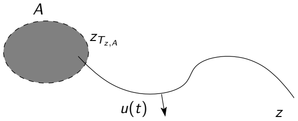
Théorème (Stroock-Varadhan 1972)

Pour tout $t_0 > 0,\ x \in \mathbb{R}^n$,

$$Supp\ P_{t_0}(x, \cdot) = \mathcal{C}\ell\{z_{t_0} ; \exists\, u \in \mathcal{C}^{morc},\ z_0 = x,\ \dot{z}_t = f(z_t) + \sigma\ u(t)\}$$

- Le système déterministe est dit faiblement contrôlable si pour tout $z \in \mathbb{R}^n$, $A \subset \mathbb{R}^n$, il existe $T_{z,A} > 0$, u tels que

$$z_0 = z,\ z_{T_{z,A}} \in A.$$



Support et récurrence

Théorème

Supposons que la condition d'Hörmander soit satisfaite et qu'il existe une mesure μ t.q.

- *Supp* $\mu = \mathbb{R}^n$,
- μ *est invariante.*

Alors, la diffusion (Z_t^z) *est récurrente.*

μ est ergodique
$h(z) = \mathbb{P}\left[\mathbb{1}_{Z_t \in A}\right]$ est invariante $\quad\Rightarrow\quad$ (Z_t^z) est récurrente.
$h(Z_t)$ est convergente
$h(z) = 1$ μ-p.s.

Corollaire

Le système déterministe (S) *est alors faiblement contrôlable*

Remarque : Pour des températures égales, en utilisant la mesure de Gibbs, on a la faible contrôlabilité.

Contrôlabilité et unicité

Théorème (Hairer 2005)

Supposons que la condition d'Hörmander soit satisfaite. Si (S) est faiblement contrôlable, alors la mesure invariante μ de (Σ) est unique (si elle existe) et Supp $\mu = \mathbb{R}^n$.

Remarque : Pour toute matrice inversible g, $\widetilde{\sigma} = \sigma g$, la contrôlabilité faible des systèmes suivants est équivalente :

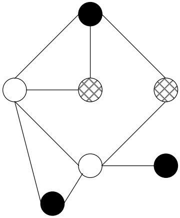
$$(S_1) \qquad \dot{z}_t = f(z_t) + \sigma \; u(t)$$
$$(S_2) \qquad \dot{z}_t = f(z_t) + \widetilde{\sigma} \; u(t)$$

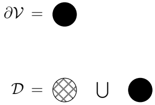
Remarque : Sous la condition d'asymétrie, lorsque les températures sont égales, le système est faiblement contrôlable, donc celui avec les températures différentes l'est également. Finalement, la mesure invariante est unique (si elle existe).

Plan de la partie

Freinage et thermostats

- Notations :





$\partial\mathcal{V}$: ensemble des atomes freinés et excités

$\mathcal{D}$: ensemble des atomes freinés

- Équations :

$$\begin{cases} dq_i = \partial_{p_i} H \; dt \\ dp_i = -\partial_{q_i} H \; dt + \dots \\ \qquad \dots - p_i \mathbb{1}_{i \in \mathcal{D}} \; dt + \sqrt{2T_i} \mathbb{1}_{i \in \partial\mathcal{V}} \; dB_i \end{cases}$$

Les potentiels harmoniques

On suppose ici que $U(x) = V(x) = \frac{x^2}{2}$.

Théorème

Le réseau conducteur de chaleur possède une unique mesure invariante si et seulement si

$$dim\, \mathcal{E}_{\Lambda,\mathcal{D}} = N.$$

Théorème

La condition d'Hörmander est satisfaite si et seulement si

$$dim\, \mathcal{E}_{\Lambda,\partial\mathcal{V}} = N.$$

Le semigroupe est alors fortement fellerien.

Remarque : Il peut y avoir existence et unicité de la mesure invariante même si la condition d'Hörmander n'est pas satisfaite.

Conditions de régularité et d'unicité

On note c le point où H atteint son minimum.

• Condition de rigidité (Principe de Lasalle) :

On dit que le réseau est rigide si toute solution de l'équation sans bruit satisfaisant $p_i \mathbb{1}_{i \in \mathcal{D}} \equiv 0$ est la solution constante $z = c$.

Théorème

Lorsque le semigroupe est fortement fellerien et le réseau est rigide, la mesure invariante, si elle existe, est unique.
De plus, $c \in Supp\, \mu$.

Remarque : Lorsque les potentiels sont harmoniques, le système est rigide si et seulement si $dim\, \mathcal{E}_{\Lambda,\mathcal{D}} = N$.

Qu'en est-il de l'existence ?

Pour des chaînes d'oscillateurs,

- L. Rey-Bellet & L. Thomas 1999 : existence et ~~convergence exponentielle~~ lorsque $deg(U) \geq deg(V)$.
- M. Hairer & J. Mattingly 2007 : absence de trou spectral lorsque $deg(V) > deg(U)$.
- M. Hairer & J. Mattingly : existence de la mesure invariante pour une chaîne avec 3 oscillateurs.