CONVERGENCE DE CERTAINES MARCHES ALÉATOIRES PERSISTENTES

Travail en commun avec :

– S. Herrmann (Nancy)

– C. Tapiero (New-York University, Polytechnic Institute)

1 Notations

Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une chaine de Markov à valeurs dans $\{-1,1\}$ de matrice de transition :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix} \qquad 0<\alpha<1, \quad 0<\beta<1.$$

On associe à (Y_n) le processus des sommes partielles :

$$X_n := Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_n, \quad n \geq 0.$$

On dit que (X_n) est une marche aléatoire *persistante*.
Deux cas particuliers :

1. $\beta = 1-\alpha$: (X_n) est une marche aléatoire classique dont la loi de l'accroissement est $(1-\alpha)\delta_{-1} + \alpha\delta_1$.
2. $\beta = \alpha$, (X_n) est une marche de *Kac* : $Y_{n+1} = Y_n$ avec probabilité $1-\alpha$ et $-Y_n$ sinon.

2 Étude à temps fixe

Proposition 1 *Soit* $\rho := 1 - \alpha - \beta$ *le facteur d'asymétrie. Alors :*

$$E[X_t|Y_0 = -1] = \frac{\alpha - \beta}{1 - \rho}(t + 1) - \frac{2\alpha}{(1 - \rho)^2}(1 - \rho^{t+1}).$$

$$E[X_t|Y_0 = +1] = \frac{\alpha - \beta}{1 - \rho}(t + 1) - \frac{2\beta}{(1 - \rho)^2}(1 - \rho^{t+1}).$$

Remarque *Il est possible de calculer le moment d'ordre 2.(TV 2007, Physica A)*

On introduit :

$$\Phi(\lambda,t) = E[\lambda^{X_t}], \quad (\lambda > 0).$$

Proposition 2 *La fonction génératrice de X_t est égale à :*

$$\Phi(\lambda,t) = a_+\theta_+^t + a_-\theta_-^t$$

avec

$$a_+ = \frac{1-\alpha+\lambda(\lambda\alpha-\theta_-)}{\lambda^2\sqrt{\mathcal{D}}} \qquad et \quad a_- = \frac{1}{\lambda} - a_+ \quad lorsque\ X_0 = Y_0 = -1$$

$$a_+ = \frac{(1-\beta)\lambda^2+\beta-\lambda\theta_-}{\sqrt{\mathcal{D}}} \qquad et \quad a_- = \lambda - a_+ \quad lorsque\ X_0 = Y_0 = 1.$$

et

$$\mathcal{D} = \Big(\frac{1-\alpha}{\lambda} + (1-\beta)\lambda\Big)^2 - 4(1-\alpha-\beta).$$

Preuve de la Proposition 2

On décompose $\Phi(\lambda, t)$ de la manière suivante

$$\Phi(\lambda, t) = \Phi_-(\lambda, t) + \Phi_+(\lambda, t),$$

avec

$$\Phi_-(\lambda, t) = E[\lambda^{X_t} 1_{\{Y_t=-1\}}], \qquad \Phi_+(\lambda, t) = E[\lambda^{X_t} 1_{\{Y_t=1\}}].$$

On montre ensuite les relations de récurrence :

$$\begin{aligned}
\Phi_-(\lambda, t+1) &= \frac{1-\alpha}{\lambda}\, \Phi_-(\lambda, t) + \frac{\beta}{\lambda}\, \Phi_+(\lambda, t) \\
\Phi_+(\lambda, t+1) &= \alpha\lambda\Phi_-(\lambda, t) + (1-\beta)\lambda\Phi_+(\lambda, t)
\end{aligned}$$

$\blacksquare$

3 Étude asymptotique

3.1 Notations

1. α_0 et β_0 deux réels : $0 < \alpha_0 \leq 1, \quad 0 < \beta_0 \leq 1$.
2. Δ_x un "petit" paramètre tel que :

$$\alpha := \alpha_0 + c_0\Delta_x \in [0,1], \quad \beta := \beta_0 + c_1\Delta_x \in [0,1].$$

3. $(Y_t,\ t \in \mathbb{N})$ une chaine de Markov à valeurs dans $\{-1,1\}$ et de matrice de transition :

$$\pi^{\Delta} = \begin{pmatrix} 1-\alpha_0-c_0\Delta_x & \alpha_0+c_0\Delta_x \\ \beta_0+c_1\Delta_x & 1-\beta_0-c_1\Delta_x \end{pmatrix}$$

4. La marche aléatoire renormalisée associée :

$$Z_s^{\Delta} = \Delta_x X_{s/\Delta_t}, \quad s \in \Delta_t \, \mathbb{N} \quad (\Delta_t > 0).$$

5. $(\tilde{Z}_s^{\Delta},\ s \geq 0)$ le processus continu obtenu par interpolation linéaire de (Z_s^{Δ}).
6. Le paramètre :

$$\rho_0 = 1 - \alpha_0 - \beta_0.$$

Remarque *On a :*

$$\rho_0 = 1 \Leftrightarrow 1 - \alpha_0 - \beta_0 = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 + \beta_0 = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = \beta_0 = 0.$$

3.2 Convergence vers le mouvement brownien avec dérive

Théorème 3 *On suppose que* $\alpha_0, \beta_0 > 0$ *et*

$$r\Delta_t = \Delta_x^2 \quad (r > 0).$$

Alors le processus

$$\xi_t^\Delta = \tilde{Z}_t^\Delta + \frac{\sqrt{r}\eta_0}{1-\rho_0}\frac{t}{\sqrt{\Delta_t}}$$

converge en distribution vers le processus $(\xi_t^0,\ t \geq 0)$, *lorsque* $\Delta_x \to 0$, *avec :*

$$\xi_t^0 = r\left(\frac{-\bar{c}}{1-\rho_0} + \frac{\eta_0 c}{(1-\rho_0)^2}\right)t + \sqrt{\frac{r(1+\rho_0)}{1-\rho_0}\left(1 - \frac{\eta_0^2}{(1-\rho_0)^2}\right)}\, W_t,$$

où $(W_t,\ t \geq 0)$ *désigne un mouvement brownien standard et*

$$\eta_0 = \beta_0 - \alpha_0, \quad c = c_0 + c_1, \quad \bar{c} = c_1 - c_0.$$

3.3 Convergence lorsque $\rho_0 = 1$

La matrice de transition de (Y_t) est :

$$\pi^\Delta = \begin{pmatrix} 1 - c_0\Delta_x & c_0\Delta_x \\ c_1\Delta_x & 1 - c_1\Delta_x \end{pmatrix} \quad (c_0, c_1 > 0).$$

Soit $(e_n,\ n \geq 1)$ une suite de v.a.r. telle que :

1. $(e_{2n};\ n \geq 1)$ and $(e_{2n-1};\ n \geq 1)$ sont indépendantes
2. Les v.a. $(e_{2n},\ n \geq 1)$ (resp. $(e_{2n-1};\ n \geq 1)$) sont iid et de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{c_1}$ (resp. $\frac{1}{c_0}$) i.e. $E[e_{2n}] = c_1$ (resp. $E[e_{2n-1}] = c_0$).

On associe à la suite $(e_n;\ n \geq 1)$ le processus de comptage :

$$N_t^{c_0,c_1} = \sum_{k \geq 1} 1_{\{e_1 + \ldots + e_k \leq t\}}, \quad t \geq 0.$$

Théorème 4 *On suppose :*

$$\alpha_0 = \beta_0 = 0, \quad Y_0 = -1, \quad \Delta_x = \Delta_t.$$

Alors, la marche aléatoire persistante interpolée $(\tilde{Z}_s^{\Delta},\ s \geq 0)$ *converge en distribution, lorsque* $\Delta_x \to 0$*, vers le processus* $\left(-Z_s^{c_0,c_1}\right)$ *où :*

$$Z_s^{c_0,c_1} = \int_0^s (-1)^{N_u^{c_0,c_1}} du \quad s \geq 0.$$

Dans le cas où $c_0 = c_1$*, alors* $\left(N_u^{c_0,c_1}\right)$ *est le processus de Poisson de paramètre* c_0*.*

Remarque

1. *Ce théorème, dans le cas symétrique, est une version processus d'approches plus analytiques : Kac 1974, livre de G. Weiss 1994. Notre approche est* **trajectorielle***.*
2. *Le processus* $\left(Z_s^{c,c}\right)$ *a été introduit par Stroock (1982).*

Un élément de preuve.

On rappelle que $Y_0 = -1$. Soit

$$T_1 = \inf \left\{ n \geq 1;\ Y_n = 1 \right\}.$$

Alors $T_1 \sim \mathcal{G}\big(c_0 \Delta_t\big)$.
On en déduit :

$$\begin{aligned} T_1' &= \inf \left\{ s;\ \tilde{Z}_s^{\Delta} > \tilde{Z}_{s-}^{\Delta} \right\} \\ &= \inf \left\{ n\Delta_t;\ Y_n = 1 \right\} \\ &= T_1 \Delta_t. \end{aligned}$$

D'où la convergence en loi de T_1' vers e_1, v.a. de loi exponentielle de paramètre $1/c_0$.

L'étude du processus $(Z_t^{c_0,c_1})$ repose sur l'observation suivante :

Sur $\big\{e_1 + \cdots + e_{2n} \leq t < e_1 + \cdots + e_{2n} + e_{2n+1}\big\}$, on a :

$$\begin{aligned}
Z_t^{c_0,c_1} &= \int_0^{e_1} (-1)^0 ds + \int_{e_1}^{e_1+e_2} (-1)^1 ds + \cdots \\
&\qquad + \int_{e_1+\cdots+e_{2n-1}}^{e_1+\cdots+e_{2n}} (-1)^{2n-1} ds + \int_{e_1+\cdots+e_{2n}}^{t} (-1)^{2n} ds \\
&= e_1 - e_2 + e_3 \cdots - e_{2n} + t - \big(e_1 + \cdots + e_{2n}\big) \\
&= t - 2\big(e_2 + e_4 + \cdots + e_{2n}\big).
\end{aligned}$$

Quelques propriétés du processus $(Z_t^{c_0,c_1})$

1. Le couple $\left(N_t^{c_0,c_1}, Z_t^{c_0,c_1}\right)$ est un processus de Markov, dont on peut calculer explicitement le semi-groupe.
2. On peut déterminer :
$$P\left(N_t^{c_0,c_1} = 2k\right), \quad P\left(N_t^{c_0,c_1} = 2k+1\right)$$
3. On a :
$$P\left(Z_t^{c_0,c_1} \in dx\right) = e^{c_0 t}\delta_t(dx) + \frac{1}{2}e^{-c_0 t} f(t,x) 1_{[-1,1]}(x)dx$$
avec
$$f(t,x) = \sqrt{\frac{c_0 c_1 (t+x)}{t-x}} I_1\left(\sqrt{c_0 c_1 (t^2 - x^2)}\right) + c_0 I_0\left(\sqrt{c_0 c_1 (t^2 - x^2)}\right)$$
et
$$I_\nu(x) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{\Gamma(\nu + k + 1) k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu + 2k}.$$
4. Il est possible de calculer la transformée de Laplace de la v.a. Z_t.

5. Lien avec l'équation du *télégraphe* (on suppose $c_0 = c_1 = c$)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et dont les dérivées sont bornées. Considérons :

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\Big\{ f(x+\sigma t) + f(x-\sigma t) \Big\}.$$

Alors u est l'unique solution de l'équation

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sigma^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & \\ u(x,0) = f(x), & \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0. \end{cases}$$

La fonction

$$w(x,t) = E\Big[u\Big(x, Z_t^{c,c}\Big)\Big], \quad (x \in \mathbb{R}, t \geq 0)$$

où

$$Z_t^{c,c} = \int_0^t (-1)^{N_s^0} ds$$

est la solution de l'équation du télégraphe :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} + 2c\dfrac{\partial w}{\partial t} = \sigma^2 \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \\ w(x,0) = f(x), \quad \dfrac{\partial w}{\partial t}(x,0) = 0. \end{cases}$$