Quelques variables aléatoires indépendantes remarquables en Théorie des Matrices Aléatoires

A. Rouault (Versailles-Saint-Quentin)

3 septembre 2008
Journées de Probabilités
Lille

Plan

- Introduction : Déterminants aléatoires
- Le groupe unitaire
- Polynôme caracteristique aléatoire
- Moments canoniques

Introduction : Déterminants aléatoires

En RMT, l'objet d'étude est la plupart du temps l'ensemble des valeurs propres (ou des valeurs singulières). Celles-ci sont en général fortement corrélées et définies "simultanément".
Par ailleurs, dans quelques modèles explicites, on peut exhiber des v.a. indépendantes non identiquement distribuées, définies séquentiellement, jouant un rôle important.

Exemple

Soit $B_{n,r} = [b_1, \ldots, b_r]$, $b_1, \ldots, b_r \in \mathbb{R}^n$, r vecteurs colonnes ($r \leq n$) et de la matrice de Gram associée $X_{n,r} = B'_{n,r} B_{n,r}$ (on remarque $X_{n,n}^{[r]} = X_{n,r}$). On construit la base orthogonale de Gram-Schmidt $(\widehat{b}_1, \ldots, \widehat{b}_n)$:
$\widehat{b}_1 = b_1$, $\widehat{b}_i = \mathrm{Proj}\ b_i$ on $\{b_1, \ldots, b_{i-1}\}^\perp$. En particulier

$$\det X_{n,r} = \prod_{i=1}^{r} \|\widehat{b}_i\|^2 \,.$$

On suppose les entrées of B iid $\mathcal{N}(0,1)$ (la matrice $X_{n,r}$ est dite de Wishart $r \times r$). Depuis Bartlett (1933) on sait que $\|\widehat{b}_i\|^2 \overset{(\mathrm{d})}{=} \mathrm{Gamma}\left(\frac{n-i+1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ et $\|\widehat{b}_1\|^2, \ldots, \|\widehat{b}_n\|^2$ sont indépendants.

$$\log\det X_{n,r} = \sum_{k=1}^{r} \log \|\widehat{b}_k\|^2 \,,$$

est un tableau triangulaire, et on peut étudier les propriétés asymptotiques ($n \to \infty$) du processus

$$\left(\log\det X_{n,\lfloor nt \rfloor}, t \in [0,1]\right)$$

(AR, 07)
Par ailleurs, évidemment

$$\log\det X_{n,r} = \sum_{j=1}^{r} \log x_j$$

où $(x_1, \ldots, x_r)$, les valeurs propres de $X_{n,r}$ ont pour densité

$$\mathrm{Cste}\ |\Delta(x_1, \ldots, x_r)| \prod_{k=1}^{r} x_k^{\frac{n-r-1}{2}} e^{-\frac{x_k}{2}} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x_k)$$

Le groupe unitaire

Soit $G \in \mathbb{U}(N)$, (groupe des matrices unitaires $N \times N$) et e_1 un vecteur cyclique pour G, La mesure spectrale de la paire (G, e_1) est l'unique probabilité $\mu_{\mathtt{w}}^{(N)}$ sur $\mathbb{T}$ telle que

$$\langle e_1, G^k e_1 \rangle = \int_{\mathbb{T}} z^k d\mu_{\mathtt{w}}^{(N)}(z) \quad , \quad k \geq 0 \,. \tag{1}$$

On a la représentation

$$\mu_{\mathtt{w}}^{(N)} = \sum_{j=1}^{N} \pi_j \delta_{e^{i\theta_j}} \tag{2}$$

les $(e^{i\theta_j}, j = 1, \ldots N)$ sont les <u>valeurs propres</u> de G et les $\pi_j = |\langle e_1, \Pi e_j \rangle|^2$ avec Π matrice unitaire diagonalisant G sont les <u>poids</u>.

Plan

Polynômes orthogonaux et coefficients de Verblunsky

- $$\mathbb{C}^N \ , \ G \ , \ \{e_1, Ge_1, \cdots, G^{N-1}e_1\}$$

  isométrique à

  $$L^2(\mathbb{T}; d\mu_{\mathtt{w}}^{(N)}) \ , \ \text{multiplication par } z \ , \ \{1, z, \ldots, z^{N-1}\}$$

Polynômes orthogonaux et coefficients de Verblunsky

- $$\mathbb{C}^N \ , \ G \ , \ \{e_1, Ge_1, \cdots , G^{N-1}e_1\}$$

  <u>isométrique à</u>

  $$L^2(\mathbb{T}; d\mu_{\mathtt{w}}^{(N)}) \ , \ \text{multiplication par } z \ , \ \{1, z, \ldots , z^{N-1}\}$$

- Polynômes orthogonaux : $\Phi_0(z), \ldots , \Phi_{N-1}(z)$ récurrence de Schur

$$\Phi_{j+1}(z) = z\Phi_j(z) - \bar{\alpha}_j \Phi_j^*(z) \quad , \quad \Phi_j^*(z) = z^j \, \overline{\Phi_j(\bar{z}^{-1})} \, . \qquad (3)$$

Polynômes orthogonaux et coefficients de Verblunsky

- $$\mathbb{C}^N \ , \ G \ , \ \{e_1, Ge_1, \cdots, G^{N-1}e_1\}$$

  isométrique à

  $$L^2(\mathbb{T}; d\mu_{\mathtt{w}}^{(N)}) \ , \ \text{multiplication par } z \ , \ \{1, z, \dots, z^{N-1}\}$$

- Polynômes orthogonaux : $\Phi_0(z), \dots, \Phi_{N-1}(z)$ récurrence de Schur

$$\Phi_{j+1}(z) = z\Phi_j(z) - \bar{\alpha}_j \Phi_j^*(z) \quad , \quad \Phi_j^*(z) = z^j \, \overline{\Phi_j(\bar{z}^{-1})} \, . \qquad (3)$$

- Les α_j $(j \geq 0)$ sont les coefficients de Schur ou Verblunsky. Ils satisfont $|\alpha_j| < 1$ pour $j \leq N-2$ et $|\alpha_{N-1}| = 1$.

En poussant la récurrence on obtient le polynôme caractéristique

$$\Phi_N(z) = \prod_{j=1}^{N} (z - \lambda_j)\,.$$

Si on orthonormalise $1, z, z^{-1}, z^2, z^{-2}, \ldots$ on obtient

$$\chi_k(z) = \begin{cases} -z^{k/2}\varphi_k^\star(z) & : k \text{ even} \\ z^{-(k-1)/2}\varphi_k(z) & : k \text{ odd} \end{cases}$$

Dans la base (χ_k), la matrice devient pentadiagonale :

$$
\mathcal{C} = \begin{pmatrix}
\bar{\alpha}_0 & \rho_0\bar{\alpha}_1 & \rho_0\rho_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
\rho_0 & -\alpha_0\bar{\alpha}_1 & -\alpha_0\rho_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\
0 & \rho_1\bar{\alpha}_2 & -\alpha_1\bar{\alpha}_2 & \rho_2\bar{\alpha}_3 & \rho_2\rho_3 & 0 & \dots \\
0 & \rho_1\rho_2 & -\alpha_1\rho_2 & -\alpha_2\bar{\alpha}_3 & -\alpha_2\rho_3 & 0 & \dots \\
0 & 0 & 0 & \rho_3\bar{\alpha}_4 & -\alpha_3\bar{\alpha}_4 & \rho_4\bar{\alpha}_5 & \dots \\
0 & 0 & 0 & \rho_3\rho_4 & -\alpha_3\rho_4 & \alpha_4\bar{\alpha}_5 & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{pmatrix}
$$

avec $\rho_k = \sqrt{1 - |\alpha_k|^2}$.

Plan

Randomisation

- Si G est distribué suivant la mesure de Haar sur $\mathbb{U}(N)$, la densité des vp est proportionnelle à

$$|\Delta(e^{\mathrm{i}\theta_1}, \ldots, e^{\mathrm{i}\theta_n})|^2 .$$

Randomisation

- Si G est distribué suivant la mesure de Haar sur $\mathbb{U}(N)$, la densité des vp est proportionnelle à

$$|\Delta(e^{\mathrm{i}\theta_1}, \ldots, e^{\mathrm{i}\theta_n})|^2 .$$

- D'autre part

Théorème (Killip et Nenciu 2004)

Si G est distribué suivant la mesure de Haar sur $\mathbb{U}(N)$, alors $\alpha_0, \cdots, \alpha_{N-2}, \alpha_{N-1}$ sont indépendants et la densité de α_j pour $j \leq N-1$ est

$$\nu_j(dz) := \frac{N-j-1}{\pi} \left(1 - |z|^2\right)^{N-j-2} \mathbf{1}_{|z|<1} d^2 z \tag{4}$$

(pour $j = N-1$, c'est la loi uniforme sur $\mathbb{T}$).

Plan

Polynôme caractéristique

- On a d'une part $\Phi_N(1) = \det(I - G) = \prod_{k=1}^{N}(1 - e^{\mathrm{i}\theta_k})$.

Polynôme caractéristique

- On a d'une part $\Phi_N(1) = \det(I - G) = \prod_{k=1}^{N}(1 - e^{i\theta_k})$.
- D'autre part

Théorème (P.Bourgade, A.Nikeghbali, AR 2007)

$$\forall k \leq N \quad , \quad \Phi_k(1) = \prod_{j=0}^{k-1}(1 - y_j) \quad , \quad y_j = \bar{\alpha}_j \prod_{r=0}^{j-1} \frac{1 - \bar{y}_r}{1 - y_r}$$

Sous Haar, les y_j sont indépendants et $y_j \overset{(d)}{=} \alpha_j$ pour tout j.

Mesures de Hua-Pickrell

On se donne un paramètre $\delta \in \mathbb{C}$ tel que $\Re \delta > -1/2$ et une densité proportionelle à

$$|\Delta(e^{i\theta_1}, \ldots, e^{i\theta_n})|^2 \prod_{k=1}^{n} (1 - e^{i\theta_k})^{\bar{\delta}} (1 - e^{-i\theta_k})^{\delta} \tag{5}$$

$$= \Delta^2 (1 - \det G)^{\bar{\delta}} (1 - \overline{\det G})^{\delta} \tag{6}$$

Les variables y_k restent indépendantes , mais les α_j ne le sont plus (PB, AN, AR 2008) .

Interprétation géométrique

Tout élément $u \in \mathbb{U}(N)$ peut s'écrire comme un produit de réflections

$$u = r_1 \dots r_N$$

et chaque réflection s'écrit dans une base adéquate comme une matrice

$$\begin{pmatrix} y & \sqrt{1-|y|^2}\,\frac{1-y}{1-\bar{y}} \\ \sqrt{1-|y|^2} & -\bar{y}\,\frac{1-\bar{y}}{1-y} \end{pmatrix}$$

Plan

Moments canoniques

- Pour $\xi \in \mathcal{M}_1(\mathbb{T})$, les moments (classiques) sont

$$t_j(\xi) := \int_{\mathbb{T}} z^j \xi(dz), \ (j \geq 1)\,,$$

Pour $n \geq 1$, les n premiers moments appartiennent à

$$M_n = \mathrm{Conv}\{(1, t, \dots, t^n), |t| = 1\}\,.$$

Moments canoniques

- Pour $\xi \in \mathcal{M}_1(\mathbb{T})$, les moments (classiques) sont

$$t_j(\xi) := \int_{\mathbb{T}} z^j \xi(dz),\ (j \geq 1)\,,$$

  Pour $n \geq 1$, les n premiers moments appartiennent à

$$M_n = \mathrm{Conv}\{(1, t, \ldots, t^n), |t| = 1\}\,.$$

- Pour $n \geq 1$, étant donné $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{int}\ M_n$, le domaine des valeurs possibles de t_{n+1} (compatibles avec les données précédentes) est un disque $D(a_k, r_k)$.

Moments canoniques

- Pour $\xi \in \mathcal{M}_1(\mathbb{T})$, les moments (classiques) sont
$$t_j(\xi) := \int_{\mathbb{T}} z^j \xi(dz), \ (j \geq 1)\,,$$
Pour $n \geq 1$, les n premiers moments appartiennent à
$$M_n = \mathrm{Conv}\{(1, t, \ldots, t^n), |t| = 1\}\,.$$
- Pour $n \geq 1$, étant donné $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{int}\ M_n$, le domaine des valeurs possibles de t_{n+1} (compatibles avec les données précédentes) est un disque $D(a_k, r_k)$.
- Les moments canoniques de ξ sont définis sequentiellement.

Moments canoniques

- Pour $\xi \in \mathcal{M}_1(\mathbb{T})$, les moments (classiques) sont
$$t_j(\xi) := \int_{\mathbb{T}} z^j \xi(dz),\ (j \geq 1)\,,$$
Pour $n \geq 1$, les n premiers moments appartiennent à
$$M_n = \mathrm{Conv}\{(1, t, \dots, t^n), |t| = 1\}\,.$$
- Pour $n \geq 1$, étant donné $(t_1, \dots, t_n) \in \mathrm{int}\ M_n$, le domaine des valeurs possibles de t_{n+1} (compatibles avec les données précédentes) est un disque $D(a_k, r_k)$.
- Les moments canoniques de ξ sont définis sequentiellement.
- $c_1(\xi) = t_1(\xi)$

Moments canoniques

- Pour $\xi \in \mathcal{M}_1(\mathbb{T})$, les moments (classiques) sont
$$t_j(\xi) := \int_{\mathbb{T}} z^j \xi(dz),\ (j \geq 1)\,,$$
Pour $n \geq 1$, les n premiers moments appartiennent à
$$M_n = \mathrm{Conv}\{(1, t, \ldots, t^n), |t| = 1\}\,.$$
- Pour $n \geq 1$, étant donné $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathrm{int}\ M_n$, le domaine des valeurs possibles de t_{n+1} (compatibles avec les données précédentes) est un disque $D(a_k, r_k)$.
- Les moments canoniques de ξ sont définis sequentiellement.
- $c_1(\xi) = t_1(\xi)$
- Si $k < \#\ \mathrm{Supp}\ \xi$, le $(k+1)$-ème moment canonique est la position relative du $(k+1)$-th moment dans ce disque i.e.
$$c_{k+1} = \frac{t_{k+1} - a_k}{\rho_k}\,.$$

Soit $D = \{z : |z| < 1\}$. Si le support de μ est infini, $c_j \in D$ pour tout j. Si le cardinal du support est n,

$$c_j \in D \ , \ j \leq n-1, |c_n| = 1 \, .$$

Il y a une bijection

$$(t_1, \dots t_n) \in \ \text{int } M_n \quad \Leftrightarrow (c_1, \dots, c_n) \in D^n$$

Pb : Description d'un point "typique" de M_n ?

Plan

Randomisation et relèvement

- Encore des iid !

Theorem (Lozada 2005)

Fixons n et tirons uniformément un point $(t_1, \ldots, t_n)$ dans l'ensemble compact M_n. Alors les n premiers moments canoniques sont indépendants et c_k suit la loi ν_{k-1} pour $k \leq n$.

Randomisation et relèvement

- Encore des iid !

Theorem (Lozada 2005)

Fixons n et tirons uniformément un point $(t_1, \dots, t_n)$ dans l'ensemble compact M_n. Alors les n premiers moments canoniques sont indépendants et c_k suit la loi ν_{k-1} pour $k \leq n$.

- Moments canoniques = Coefficients de Verblunsky !

Theorem (F.Gamboa, AR 2008)

On peut relever un vecteur de moments choisi uniformément dans M_n, en une mesure aléatoire, qui est la mesure spectrale de la paire (U, e_1) où $U \in \mathbb{U}(n+1)$ suit la mesure de Haar.

Bibliography

- Bourgade, P., Nikeghbali, A. and Rouault, A. (2007) : Hua-Pickrell measures on general compact spaces. *arXiv :0712.0848 [math.PR]*.
- Bourgade, P., Nikeghbali, A. and Rouault, A. (2007) : Circular Jacobi ensembles and deformed Verblunsky coefficients. *arXiv :08 [math.PR]*.
- Gamboa, F. and Rouault, A. (2008) : Canonical moments and random spectral measures *arXiv :0801.4400 [math.PR]*.
- Gamboa, F. and Rouault, A. (2008) : Large deviations for random spectral measures and sum rules *arXiv :0804.4322 [math.PR]*.
- Rouault, A. (2007) : Asymptotic behavior of random determinants in the Laguerre, Gram and Jacobi ensembles. *ALEA, Latin American Journal of Probability and Mathematical Statistics*, *III*, 180–230.