Journés de Probabilités 2008
USTL-Université de Lille I, 05 septembre,
10h50–11h20.

Marches aléatoires transientes en dimension 2

E-mail: arnaud.leny@math.u-psud.fr

Collaboration avec N. Guillotin-Plantard (Lyon I)

Plan

I Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$.

II Marches aléatoires sur réseaux orientés.

III Réseaux dynamiquement orientés.

IV Résultats :

1. Critère de transience.
2. Loi des grands nombres.
3. Théorèmes limites fonctionnels.
4. Dépendance asymptotique

V Preuve : embarquement en scène aléatoire.

VI Questions ouvertes et perspectives.

Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}^d$

Chaîne de Markov homogène $\mathbb{M} = (\mathbb{M}_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$\forall x, y \in \mathbb{Z}^d$, $(e_1, \ldots, e_d)$ vecteurs unités de $\mathbb{Z}^d$,

$$\mathbb{P}[M_{n+1} = y \mid M_n = x] = \begin{cases} \frac{1}{2d} & \text{si } \mathrm{y} = \mathrm{x} \pm \mathrm{e_d} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comportements asymptotiques :

- Récurrence vs Transience.
- Lois des grands nombres (LFGN).
- Théorème central limite (TCL).
- Loi du logarithme itéré (LLI).
- Principes de grandes déviations (PGD).
- Théorème central limite fonctionnel (TCLF).
- Théoreme limite local (TLL).

Récurrence versus Transience

M.a. simple partant de l'origine ($M_0 = 0$):

À quelle fréquence la marche revient-elle à l'origine ?

Récurrence :

$$\mathbb{P}\big[\mathrm{limsup}_n\{\mathrm{M}_n = 0\}\big] := \mathbb{P}\big[\cap_{i=1}^{n} \cup_{k\geq i}\{\mathrm{M}_n = 0\}\big] = 1.$$

P. tous les points sont visités *un infinité de fois*

Transience :

$$\mathbb{P}\big[\mathrm{limsup}_n\{\mathrm{M}_n = 0\}\big] := \mathbb{P}\big[\cap_{i=1}^{n} \cup_{k\geq i}\{\mathrm{M}_n = 0\}\big] = 0.$$

P. tout point est visité *un nombre fini de fois*

Tous les chemins mènent à Rome....

Théorème 1:

La marche aléatoire simple est *récurrente* sur $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}^2$.

`Preuve:` Combinatoire, théorème limite local, propriété de Markov forte

$+$ caractérisation via fonctions génératrices

....sauf les chemins cosmiques !

Théorème 2:

La marche aléatoire simple est *transiente* sur $\mathbb{Z}^d$, $\forall d \geq 3$.

`Preuve:` Borel-Cantelli

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}[M_n = 0] < +\infty \implies \mathbb{P}[\mathrm{limsup_n\{M_n = 0\}}] = 0$$

Propriétés asymptotiques en dimension 1

$Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$

Loi des Grands Nombres

$$\frac{Y_n}{n} \longrightarrow 0 \;\; \mathbb{P}-\text{p.s., en } \mathbb{P} \text{ et dans } \mathbb{L}^2$$

Théoreme Central Limite

$$\frac{Y_n}{\sqrt{n}} \Longrightarrow_{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Loi du Logarithme itéré

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \frac{Y_n}{n^{1/2+\epsilon}} = 0, \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

$$\limsup_n \frac{Y_n}{\sqrt{2n \log\log n}} = 1, \quad \mathbb{P}-\text{p.s.}$$

Théoreme Limite Local

$$\mathbb{P}[Y_{2n} = 0] \approx \frac{C}{\sqrt{n}}$$

Théoreme Central Limite Fonctionnel

$$\left(\frac{Y_{[nt]}}{\sqrt{n}}\right)_{t\geq 0} \Longrightarrow_{\mathcal{D}} (B_t)_{t\geq 0}$$

Marche aléatoire sur un réseau orienté

Orientations horizontales: $\epsilon = (\epsilon_y)_{y\in\mathbb{Z}}$

$$\epsilon_y = +1 \iff \text{Niveau } y \text{ oriente' vers la gauche}$$

$$\epsilon_y = -1 \iff \text{Niveau } y \text{ oriente' vers la droite}$$

Exemples

- **`Réseau alterné déterministe`** $\mathbb{L}$: $\epsilon_y = (-1)^y$

  extention aux orientations périodiques

- **`Réseau bidirectionnel`** $\mathbb{H}$: $\epsilon_y = \mathbf{1}_{y\geq 0} - \mathbf{1}_{y<0}$

  extention à des bandes unidirectionnelles infinies

- **`Réseau aléatoirement orientés`** $\mathbb{L}^\epsilon$: ϵ aléatoire

  Loi de $(\epsilon_y)_{y\in\mathbb{Z}} \iff$ champ aléatoire $\mathbb{Q}$

  $\mathbb{Q}$ (non)-produit, (in)homogène

- **`Réseaux dynamiquement orientés`** :

  $\mathbb{Q}$ dérivée d'un système dynamique

  (avec exportation de corrélations éventuelles)

Résultats de récurrence et de transience

- `Réseau alterné déterministe` $\mathbb{L}$ `([CP1])`

  Thm 3: La marche aléatoire simple sur $\mathbb{L}$ est *récurrente*

- `Réseau bidirectionnel` $\mathbb{H}$ `([CP2])`

  Thm 4: La m.a. simple sur $\mathbb{H}$ est *transiente*

- `Réseau aléatoirement orientés` $\mathbb{L}^{\epsilon}$ `([CP1])`

  $\mathbb{Q}$ produit homogène

  Thm 5:

  Pour des v.a. ϵ_y i.i.d. and centrées, la marche aléatoire simple sur $\mathbb{L}^{\epsilon}$ est *transiente* pour $\mathbb{Q}$-p.t.(ϵ).

- `Réseaux dynamiquement orientés ([GPLN1],[P])`

  Transience pour ϵ centrées "pas trop déterministes"

Réseaux dynamiquement orientés

Système dynamique $S = (E, \mathcal{A}, \mu, T)$, $T\mu = \mu$

fonction de génération $f : E \longrightarrow [0,1]$, $\int_E f d\mu = \frac{1}{2}$

Cas "Quenched":

Loi $\mathbb{Q} = \mathbb{P}_T^{(x)}$ produit pour $x \in E$ fixé

$$\mathbb{P}_T^{(x)} = \otimes_y \mathbb{P}_{T,y}^{(x)}, \text{ avec } \mathbb{P}_{\mathrm{T,y}}^{(\mathrm{x})}[\epsilon_{\mathrm{y}} = +1] = \mathrm{f}(\mathrm{T}^{\mathrm{y}}\mathrm{x})$$

.

Cas "annealed":

$\mathbb{Q} = \mathbb{P}_\mu$, μ-moyennisation sur $x \in E$

$$\mathbb{P}_\mu[\epsilon \in A] = \int_E \mathbb{P}_T^{[x]}[\epsilon \in A] d\mu(x)$$

Marginales:

$$\mathbb{P}_\mu[\epsilon_y = +1] = \int_E f(T^y x) d\mu(x) = \int_E f d\mu = \frac{1}{2}$$

Corrélations:

$$\mathrm{Cov}_\mu(\epsilon_0 \epsilon_{\mathrm{y}}) = 4.\mathrm{C}_\mu^{\mathrm{y}}(\mathrm{f}) = 4 \int_{\mathrm{E}} \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{f}(\mathrm{T}^{\mathrm{y}}(\mathrm{x})) d\mu(\mathrm{x}) - 1$$

Critère de transience et LGN

Transience sur réseaux dynamiquement orientés

Théorème 6 [GPLN1]:

$$\text{Si} \quad \int_{\mathsf{E}} \frac{1}{\sqrt{f(1-f)}}\, \mathrm{d}\mu \;<\; +\infty, \quad \text{alors}$$

1. Dans le cas "annealed", pour $\mathbb{P}_\mu$-p.t. orientation ϵ, la marche aléatoire simple sur le réseau dynamiquement orienté lattice $\mathbb{L}^\epsilon$ est transiente.

2. Dans le cas "quenched", pour μ-p.t. $x \in E$, pour $\mathbb{P}_T^{(x)}$-p.t. ϵ, la marche aléatoire simple sur le réseau dynamiquement orienté lattice $\mathbb{L}^\epsilon$ est transiente.

LGN dans le cas ergodique:

Théorème 7[GPLN1]: Si $S = (E, \mathcal{A}, \mu, T)$ est ergodique, alors la marche aléatoire simple sur $\mathbb{L}^\epsilon$ a une vitesse $\mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_\mu$-presque sûrement nulle, i.e.

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{M_n}{n} = (0,0) \qquad \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_\mu - \text{presque surement.}$$

Cas i.i.d.: Théorème limite fonctionnel

On considère

- Un mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ de temps local $(L_t(x))_{t\geq 0}$.
- Une paire de mouvements browniens indépendants $(Z_+(x), Z_-(x))$, également indépendants de $(B_t)_{t\geq 0}$.

On peut alors définir [KS] le processus

$$\Delta_t = \int_0^\infty L_t(x) dZ_+(x) + \int_0^\infty L_t(-x) dZ_-(x)$$

Il est non-Gaussien, autosimilaire d'indice 3/4 et possède une version continue. Pour $m = \frac{1}{2}$ (ici), on note

$$\Delta_t^m = \frac{m}{(1+m)^{3/4}} \cdot \Delta_t, \ \forall t \geq 0$$

Théorème 8[GPLN1]:

$$\left(\frac{1}{n^{3/4}} M_{[nt]}\right)_{t\geq 0} \stackrel{\mathcal{D}}{\Longrightarrow} (\Delta_t^m, 0)_{t\geq 0}.$$

Théorème 9[GPLN2]:

$$\left(\frac{1}{n^{3/4}} M_{[nt]}^{(1)}, \frac{1}{n^{1/2}} M_{[nt]}^{(2)}\right)_{t\geq 0} \stackrel{\mathcal{D}}{\Longrightarrow} \left(\Delta_t^m, B_t\right)_{t\geq 0}$$

où les composantes asymptotiques horizontales $(\Delta_t^m)_{t\geq 0}$ et verticales $(B_t)_{t\geq 0}$ ne sont pas indépendantes.

Embarquement en scène aléatoire

Embarquement vertical :

Marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}$, $Y = (Y_n)_n$

$$\text{Temps local : } \eta_{\mathrm{n}}(\mathrm{y}) = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} \mathbf{1}_{\mathrm{Y_k=y}} \sim \mathrm{C} \cdot \sqrt{n}$$

Embarquement vertical : M.a. X sur $\mathbb{Z}$

Sauts géométriques $\left(\xi_i^{(y)}\right)_{i,y}$ i.i.d. de moyenne m $(= \frac{1}{2})$

$$X_n = \sum_{y \in \mathbb{Z}} \epsilon_y \sum_{i=1}^{\eta_{n-1}(y)} \xi_i^{(y)}$$

Temps aléatoires :

$\forall n \in \mathbb{N}$, T_n: Instant suivant le n^{e} mouvement vertical

$$T_n = n + \sum_{y \in \mathbb{Z}} \sum_{i=1}^{\eta_{n-1}(y)} \xi_i^{(y)}$$

Lemme([CP1]: $\frac{T_n}{n} \longrightarrow_{\mathbb{P}} 1 + m$

- $M_{T_n} = (X_n, Y_n)$
- Pour ϵ donné

$$(M_{T_n})_n \text{ transiente } \Longrightarrow (M_n)_n \text{ transiente}$$

Marche aléatoire en scène aléatoire

On peut écrire $X_n = X_n^{(1)} + m \cdot Z_n$ avec

$$\begin{aligned} X_n^{(1)} &= \sum_{y \in \mathbb{Z}} \epsilon_y \Big(\sum_{i=1}^{\eta_{n-1}(y)} (\xi_i^{(y)} - m) \Big) \\ Z_n &= \sum_{y \in \mathbb{Z}} \epsilon_y \eta_{n-1}(y) = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_{Y_k} \end{aligned}$$

Z : marche aléatoire en scène aléatoire [KS79]

Variance : $\sigma^2(Z_n) = \mathbb{E} \sum_{y \in \mathbb{Z}} \Big(\sum_{k=0}^{n} \mathbf{1}_{Y_k = y} \Big)^2 = \ldots$

$$\cdots = \sum_{k=0}^{n} \sum_{l=0}^{n} \mathbb{P}\big[Y_{|k-l|} = 0\big] \sim C \cdot n^{3/2}$$

Théorème 10 ([KS]):

$$\Big(\frac{1}{n^{3/4}} Z_{[nt]} \Big)_{t \geq 0} \Longrightarrow_{\mathcal{D}} (\Delta_t)_{t \geq 0}$$

Lemme 2 ([GPLN2])

$$\frac{X_n^{(1)}}{n^{3/4}} \longrightarrow 0 \;\; \mathbb{P} \otimes \mathbb{P}_\mu - \text{p.s.}$$

Questions ouvertes et perspectives

- Extension du TLF aux orientations dynamiques ([P])

- **Conjecture**

  Théorème limite local:

  $$\mathbb{P}[M_{2n} = 0] \sim C \cdot n^{-5/4}$$

- Questions: Théoremes limites

  Principe d'invariance, LIL, PGD, etc.

  et caractérisations des processus limites.

- Extensions:

  Doubles orientations ou autres réseaux via des couplages de marches en scènes aléatoires.

Références

[CP1] M. Campanino and D. Pétritis.

Random walks on randomly oriented lattices.

Mark. Proc. Relat. Fields, **9**:391–412, 2003.

[CP2] M. Campanino and D. Pétritis. On the physical relevance of random walks: an example of random walks on randomly oriented lattices.

in *"Random walks and geometry"*, V. Kaimanovich (ed.), Walter de Gruyter, 393–411, 2004.

[GPLN1] N. Guillotin-Plantard and A. Le Ny.

Transient random walks in dimension 2.

Theo. Probab. and Appl., **52**, No 4, :815–826, 2007.

[GPLN2] N. Guillotin-Plantard and A. Le Ny.

A functional limit theorem for a 2d-random walk with dependent marginals.

Elect. Commun. Probab. **13**:337–351, 2008.

[KS] H. Kesten and F. Spitzer.

A limit theorem related to a new class of self similar processes.

Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **50**:5–25, 1979.

[P] F. Pène.

Transient random walk in $\mathbb{Z}^2$ with stationary orientations.

Prépublication de l'université de Bretagne occidentale, à paraître dans ESAIM 2008.