Asymptotiques browniennes pour certains Automates Cellulaires

Philippe Chassaing, Lucas Gerin
Institut Élie Cartan, Nancy

Journées de Probabilités 2008

Motivations

Méta-définition

Un Automate Cellulaire, c'est un système dynamique "très simple" $(\sigma^t)_{t\in\mathbb{N}}$ *sur* $\{0,1\}^A$*, avec* A *un ensemble fini.*

Dans la suite, $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Motivations

Méta-définition

Un Automate Cellulaire, c'est un système dynamique "très simple" $(\sigma^t)_{t\in\mathbb{N}}$ sur $\{0,1\}^A$, avec A un ensemble fini.

Dans la suite, $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Informatique	▷ Calculabilité ▷ Modélisation de systèmes complexes (biologie, théorie des jeux,...) ▷ Stabilité
Probabilités	▷ Mécanique statistique

Automates Cellulaires

Définition

Un Automate Cellulaire Élémentaire, c'est un triplet (n, σ^0, δ) *:*

- $n \geq 1$ *est le nombre de* **cellules**,
- $\sigma^0 \in \{0,1\}^n$ *est la* **configuration initiale**,
- $\delta : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ *est la* **règle locale**

On suppose ici que $\delta(0,0,0) = 0$ et $\delta(1,1,1) = 1$.
$\Rightarrow 2^6 = 64$ règles différentes.

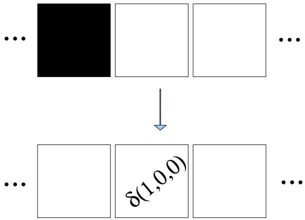
Automates Cellulaires

Définition

Un Automate Cellulaire Élémentaire, c'est un triplet (n, σ^0, δ) *:*

- $n \geq 1$ *est le nombre de* **cellules**,
- $\sigma^0 \in \{0,1\}^n$ *est la* **configuration initiale**,
- $\delta : \{0,1\}^3 \to \{0,1\}$ *est la* **règle locale**

On suppose ici que $\delta(0,0,0) = 0$ et $\delta(1,1,1) = 1$.
$\Rightarrow 2^6 = 64$ règles différentes.



Dynamique déterministe

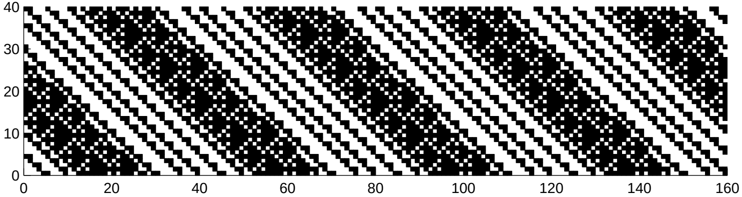
On s'intéresse à la suite $(\sigma^t)_{t\in\mathbb{N}}$ dans $\{0,1\}^n$ définie de la façon suivante :

Connaissant $\sigma^t = (\sigma_1^t, \ldots, \sigma_n^t)$,

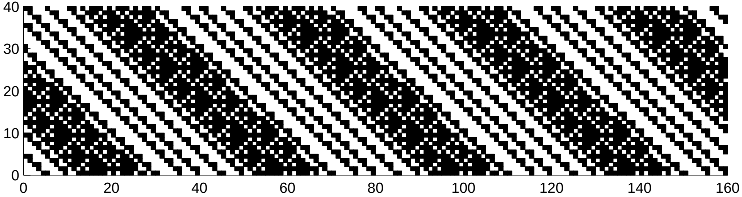
$$\sigma_i^{t+1} = \delta(\sigma_{i-1}^t, \sigma_i^t, \sigma_{i+1}^t), \text{ pour tout } i.$$

"À chaque instant, chaque cellule est mise à jour selon les valeurs de ses voisines, et la règle δ."

Dynamique déterministe



Dynamique déterministe



Wolfram 1980-. . . : Classification des ACE
selon (entre autres) la longueur des cycles.

Dynamique aléatoire (ou *asynchrone*)

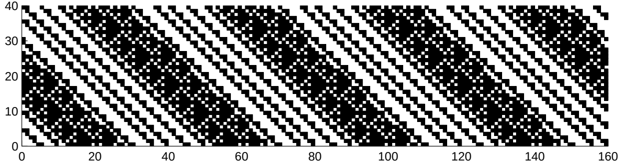
Connaissant $\sigma^t = (\sigma_1^t, \ldots, \sigma_n^t)$, on tire i uniformément parmi $\{1, 2, \ldots, n\}$,

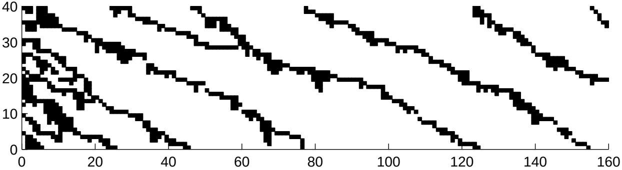
$$\sigma_i^{t+1} = \delta(\sigma_{i-1}^t, \sigma_i^t, \sigma_{i+1}^t).$$

Les $n-1$ autres *cellules* restent inchangées.

"À chaque instant, une cellule seulement est mise à jour selon les valeurs de ses voisines, et la règle δ."

Déterministe vs Aléatoire : un exemple





Temps de convergence

À partir de maintenant, on part de p "zones noires" de même taille

$$\sigma^0 = 0^{n/2p}1^{n/2p}\dots 0^{n/2p}1^{n/2p}.$$

Temps de convergence

À partir de maintenant, on part de p “zones noires” de même taille

$$\sigma^0 = 0^{n/2p} 1^{n/2p} \dots 0^{n/2p} 1^{n/2p}.$$

Définition

Le Temps de Convergence Moyen est le réel $T(n, \delta)$ défini par

$$T = T(n, \delta) = \mathbb{E}[\tau] \in \overline{\mathbb{R}}_+,$$

où

$$\tau = \min\{t \geq 0 \textit{ tel que } \sigma^t \textit{ est un point fixe. }\}$$

Une classification effective

Théorème ([Fatès et al. '05],[Chassaing,LG '08])

On a forcément l'un des 5 cas suivants :

$$\begin{array}{rcl} T/n\log n & \to & c^{ste} > 0 \\ T/n^2 & \to & c^{ste} > 0 \\ T/n^3 & \to & \xi \\ T/2^n & \to & \mathcal{E} \\ T = \infty & p.s. & \end{array}$$

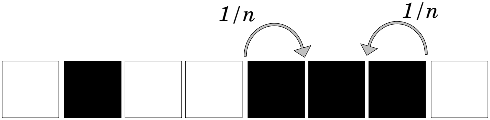
avec

$$\mathcal{E} = \mathrm{Exp}(1),$$
$$\xi = \min\{t \geq 0; X_t = 0\}.$$

X_t est un certain processus stochastique (qui dépend de δ).

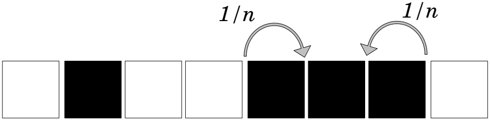
Plan

Une règle en n^2



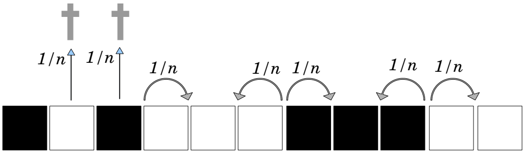
(a,b,c)	001	100	101	010	011	110
$\delta(a,b,c)$	0	0	0	1	0	0

Une règle en n^2



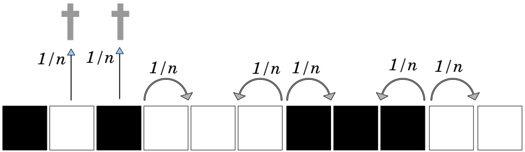
$\Rightarrow$ Comportement asymptotique facile.

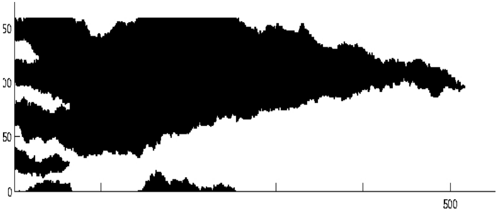
Une règle “brownienne”



(a, b, c)	001	100	101	010	011	110
$\delta(a, b, c)$	**1**	**1**	**1**	**0**	**0**	**0**

Une règle "brownienne"





Convergence de la règle brownienne

Pour $i = 1, \ldots, p$, on note

$$\begin{aligned} G_\ell^i &= \text{ frontière gauche de la } i\text{-ème zone noire à l'instant } \ell, \\ D_\ell^i &= \text{ frontière droite de la } i\text{-ème zone noire à l'instant } \ell. \end{aligned}$$

Théorème

Pour la règle brownienne, on a la convergence faible

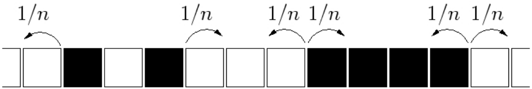
$$\frac{1}{n}\Big(G^1_{\lfloor 2tn^3 \rfloor}, D^1_{\lfloor 2tn^3 \rfloor}, \ldots, G^p_{\lfloor 2tn^3 \rfloor}, D^p_{\lfloor 2tn^3 \rfloor}\Big)_{t\geq 0} \Rightarrow \Gamma\Big(B^1, \ldots, B^{2p}\Big)_{t\geq 0},$$

où

- Γ *est l'opérateur qui "tue" deux processus lorsqu'ils se rencontrent.*
- *les* B^i *sont des MB indépendants.*

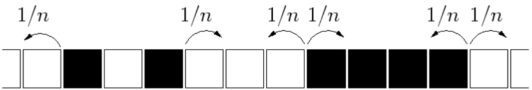
Plan

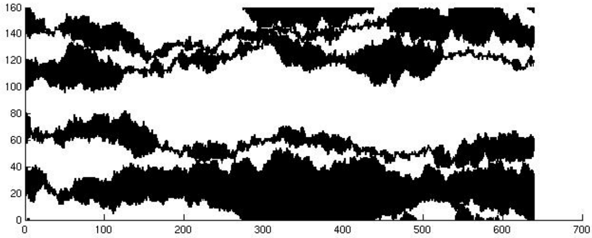
Une règle “divergente”



(a, b, c)	001	100	101	010	011	110
$\delta(a, b, c)$	**1**	**1**	**0**	**1**	**0**	**0**

Une règle “divergente”





Question : Existe-t-il un opérateur

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{C}_d(\mathbb{R}_+, \mathbb{T}) & \to & \mathcal{C}_d(\mathbb{R}_+, \mathbb{T}) \\ & (f_1, \ldots, f_d) & \mapsto & (\Phi_1, \ldots, \Phi_d) \end{array}$$

avec $\Phi(0) = f(0)$ et

1. $\Phi_1(t) \leq \Phi_2(t) \leq \ldots \Phi_d(t) \leq \Phi_1(t)$, pour tout t (ordre circulaire)
2. Pour tout t, $\{\Phi_1, \ldots, \Phi_d\} = \{f_1, \ldots, f_d\}$.

- Construction entièrement algébrique
- Calculs possibles

Convergence vers un MB démêlé

Théorème

Pour la règle précédente, on a la convergence faible

$$\frac{1}{n}\left(G^1_{\lfloor 2tn^3\rfloor}, D^1_{\lfloor 2tn^3\rfloor}, \dots, G^p_{\lfloor 2tn^3\rfloor}, D^p_{\lfloor 2tn^3\rfloor}\right)_{t\geq 0} \Rightarrow \Phi\left(B^1, \dots, B^{2p}\right)_{t\geq 0},$$

où Φ est l'opérateur de démêlage

- Comportement asymptotique des marches réfléchies.

Perspectives

- Autres configurations initiales
- Autres perturbations
- Automates cellulaires 2D **[Fatès,LG 08]**
- ...

Ph.Chassaing & L.Gerin
Asynchronous Cellular Automata and Brownian Motion.
Analysis of Algorithm 2007.