Approche particulaire d'une EDS conduite par un Bruit Blanc via la théorie du transport

En collaboration avec Joaquin Fontbona et Sylvie Méléard

Journées de Probabilités, Septembre 2008.

1. Le problème On considère les processus définis par :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(X_s - y) W_P(dy, ds) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} b(X_s - y) P_s(dy) ds$$

où $P_t = \mathcal{L}(X_t)$ et W_P est un Bruit Blanc sur $[0, \infty) \times \mathbb{R}^d$ de mesure de covariance $P_t(dy)dt$,
et σ, b fonctions lispchitziennes.

$\rightsquigarrow$ par exemple, les processus de Landau.

Proposition Si $X_0 \in \mathbb{L}^2$, $\exists !$ solution avec $E[\sup_{t \in [0,T]} |X_t|^2] < \infty$.

But : Construire un système de particules approchant la solution de l'EDS et obtenir une vitesse de convergence.

Plan

1. **Le problème**
2. **À propos du bruit blanc**
3. **Idée de base de l'approche particulaire**
4. **Un peu de théorie du transport**
5. **Construction du système de particules**

2. À propos du bruit blanc

Définition (Walsh 84)

Un bruit blanc W sur $\mathtt{R}^+ \times \mathtt{R}^d$ de mesure de covariance $\mu = \nu(dy)ds$ est une mesure aléatoire telle que $\forall A \in \mathcal{B}(\mathtt{R}^+ \times \mathtt{R}^d)$

1. $W(A) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{N}(0, \mu(A))$,
2. Si $A \cap B = \emptyset$, $W(A)$ et $W(B)$ sont indép. et

$$W(A \cup B) = W(A) + W(B).$$

Le processus $W_t(A) = W([0,t] \times A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathtt{R}^d)$, est alors une mesure martingale orthogonale de crochet $< W(A), W(B) >_t = t\nu(A \cap B)$.

Voir Walsh (84) pour la construction de l'intégrale stochastique par rapport au bruit blanc.

3. Idée de base de l'approche particulaire

$$X_t = X_0 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(X_s - y) W_P(dy, ds) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} b(X_s - y) P_s(dy) ds$$

On approche la non linéarité P par la mesure empirique du système de particules μ^n.

Premier système de particule défini par :

$$X_t^{i,n} = X_0^i + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(X_s^i - y) W_{\mu^n}(dy, ds) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_0^t b(X_s^{i,n} - X_s^{j,n}) ds$$

avec $\mu_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_t^{i,n}}$ et X_0^i v.a. iid de loi P_0.

$\Rightarrow$ Travail de Méléard & Roelly-Coppoletta (88)

3. Idée de base de l'approche particulaire

$$X_t = X_0 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(X_s - y) W_P(dy, ds) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} b(X_s - y) P_s(dy) ds$$

On approche la non linéarité P par la mesure empirique du système de particules μ^n.

Premier système de particule défini par :

$$X_t^{i,n} = X_0^i + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(X_s^i - y) W_{\mu^n}(dy, ds) + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \int_0^t b(X_s^{i,n} - X_s^{j,n}) ds$$

avec $\mu_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_t^{i,n}}$ et X_0^i v.a. iid de loi P_0.

$\Rightarrow$ Travail de Méléard & Roelly-Coppoletta (88) $\rightsquigarrow$ non simulable

Regardons le problème de martingale associé à l'EDS

$$\phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} L\phi(X_s, y) P_s(dy) ds$$

avec

$$L\phi(x,y) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} (\sigma.\sigma^t)_{ij} (x-y)\, \partial^2_{ij}\phi(x) + \sum_{i=1}^{d} b_i (x-y)\, \partial_i \phi(x).$$

Regardons le problème de martingale associé à l'EDS

$$\phi(X_t) - \phi(X_0) - \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} L\phi(X_s, y) P_s(dy) ds$$

avec

$$L\phi(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} (\sigma.\sigma^t)_{ij}\,(x-y)\,\partial^2_{ij}\phi(x) + \sum_{i=1}^{d} b_i\,(x-y)\,\partial_i\phi(x).$$

$$\Downarrow$$

Pour $i = 1, \ldots, n$

$$\phi(X_t^{i,n}) - \phi(X_0^i) - \int_0^t \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} L\phi(X_s^{i,n}, X_s^{j,n}) ds.$$

On considère le système de n particules $(X^{i,n})_{1\leq i\leq n}$ définies par

$$X_t^{i,n} = X_0^i + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sigma(X_s^{i,n} - X_s^{k,n}) dB_s^{ik} + \frac{1}{n} \int_0^t \sum_{k=1}^n b(X_s^{i,n} - X_s^{k,n}) ds$$

où B^{ik} mouvements browniens indépendants

et X_0^i v.a. iid de loi P_0 et indép. des browniens.

En notant, $\mu_t^n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{X_t^{i,n}}$, et

$$M_t(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^t \sum_{k=1}^n f(s, \omega, X_s^{k,n}(\omega)) dB_s^{ik}$$

M est une mesure orthogonale de covariance $\mu_t^n dt$.

On considère le système de n particules $(X^{i,n})_{1\leq i\leq n}$ définies par

$$X_t^{i,n} = X_0^i + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sigma(X_s^{i,n} - X_s^{k,n}) dB_s^{ik} + \frac{1}{n} \int_0^t \sum_{k=1}^n b(X_s^{i,n} - X_s^{k,n}) ds$$

où B^{ik} mouvements browniens indépendants

et X_0^i v.a. iid de loi P_0 et indép. des browniens.

En notant, $\mu_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_t^{i,n}}$, et

$$M_t(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^t \sum_{k=1}^n f(s, \omega, X_s^{k,n}(\omega)) dB_s^{ik}$$

M est une mesure orthogonale de covariance $\mu_t^n dt$.

Théorème 1

Il y a propagation du chaos du système de particules de loi limite la solution de l'EDS initiale.

On considère le système de n particules $(X^{i,n})_{1\leq i\leq n}$ définies par

$$X_t^{i,n} = X_0^i + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^n \sigma(X_s^{i,n} - X_s^{k,n}) dB_s^{ik} + \frac{1}{n} \int_0^t \sum_{k=1}^n b(X_s^{i,n} - X_s^{k,n}) ds$$

où B^{ik} mouvements browniens indépendants

et X_0^i v.a. iid de loi P_0 et indép. des browniens.

En notant, $\mu_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_t^{i,n}}$, et

$$M_t(f)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^t \sum_{k=1}^n f(s, \omega, X_s^{k,n}(\omega)) dB_s^{ik}$$

M est une mesure orthogonale de covariance $\mu_t^n dt$.

Théorème 1

Il y a propagation du chaos du système de particules de loi limite la solution de l'EDS initiale.

$\rightsquigarrow$ Mais pas de vitesse de convergence !

Différence avec l'équation de Mc Kean - Vlasov

(Sznitman 91, Méléard 95)

$$X_t = X_0 + \int_0^t \left(\int_{\mathbb{R}^d} \sigma(X_s - y) P_s(dy) \right) dB_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} b(X_s - y) P_s(dy) ds$$

où $P_t = \mathcal{L}(X_t)$ et B mouvement brownien.

On considère n copies indépendantes du processus non linéaire

$$\overline{X}_t^i = X_0^i + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(\overline{X}_s^i - y) P_s(dy) dB_s^i + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} b(\overline{X}_s^i - y) P_s(dy) ds$$

où B^i mouvements browniens indépendants

et X_0^i v.a. indép. de loi P_0 et indép. des B^i.

Système de particules associé :

$$X_t^{i,n} = X_0^i + \int_0^t \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sigma(X_s^{i,n} - X_s^{k,n}) \right) dB_s^i + \int_0^t \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n b(X_s^{i,n} - X_s^{k,n}) ds$$

Dans le cas présent

Soit n copies indépendantes du processus non linéaire

$$\overline{X}_t^i = X_0^i + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(\overline{X}_s^i - y) W_P^i(dy, ds) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} b(\overline{X}_s^i - y) P_s(dy) ds$$

et le système de particules

$$X_t^{i,n} = X_0^i + \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^t \sum_{k=1}^n \sigma(X_s^{i,n} - X_s^{k,n}) dB_s^{ik} + \frac{1}{n} \int_0^t \sum_{k=1}^n b(X_s^{i,n} - X_s^{k,n}) ds$$

Dans le cas présent

Soit n copies indépendantes du processus non linéaire

$$\overline{X}_t^i = X_0^i + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(\overline{X}_s^i - y) W_P^i(dy, ds) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} b(\overline{X}_s^i - y) P_s(dy) ds$$

et le système de particules

$$X_t^{i,n} = X_0^i + \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^t \sum_{k=1}^n \sigma(X_s^{i,n} - X_s^{k,n}) dB_s^{ik} + \frac{1}{n} \int_0^t \sum_{k=1}^n b(X_s^{i,n} - X_s^{k,n}) ds$$

Idée Construire les browniens par une transformation des bruits blancs W_P^i via la théorie du transport.

Soit n copies indépendantes du processus non linéaire

$$\overline{X}_t^i = X_0^i + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(\overline{X}_s^i - y) W_P^i(dy, ds) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} b(\overline{X}_s^i - y) P_s(dy) ds$$

Théorème 2 Si $P_t << \mathcal{L}$ebesgue pour $t > 0$, il existe des mvts browniens (B^{ik}) indépendants tels que les particules

$$X_t^{i,n} = X_0^i + \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^t \sum_{k=1}^n \sigma(X_s^{i,n} - X_s^{k,n}) dB_s^{ik} + \frac{1}{n} \int_0^t \sum_{k=1}^n b(X_s^{i,n} - X_s^{k,n}) ds$$

vérifient

$$E\left(\sup_{t \in [0,T]} |X_t^{i,n} - \overline{X}_t^i|^2 \right) \leq C \exp(C'T) \int_0^T E(W_2^2(\nu_s^n, P_s)) ds$$

où ν^n est la mesure empirique des $\overline{X}^i$.

Conséquence

En utilisant le résultat de Rachev & Rüschendorf sur l'approximation d'une mesure par la mesure empirique de v.a. iid, on a alors une estimation de la vitesse de convergence :

Si de plus $E[|X_0|^{d+5}] < \infty$, alors

$$\mathcal{W}_2^2(\mathcal{L}(X^{1,n}), P) \leq C_{T,d} n^{\frac{-2}{d+4}}.$$

4. Un peu de théorie du transport

Soit μ, $\nu \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^d)$ et $\pi \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}^{2d})$ avec $\pi <^{\mu}_{\nu}$.

Distance de Wasserstein : $W_2^2(\mu,\nu) = \inf\limits_{\pi <^{\mu}_{\nu}} \int_{\mathbb{R}^{2d}} |x-y|^2 \pi(dx,dy)$.

Problème de Monge-Kantorovich :

$$\Pi^*(\mu,\nu) = \underset{\pi <^{\mu}_{\nu}}{argmin} \int_{\mathbb{R}^{2d}} |x-y|^2 \pi(dx,dy).$$

Théorème (Brenier) Si $\mu << \mathcal{L}$ebesgue, il existe un transport optimal T tel que $\mu(dx) \otimes \delta_{T(x)}(dy)$ est l'unique solution du problème de Monge. On a alors

$$W_2^2(\mu,\nu) = \int_{\mathbb{R}^d} |x - T(x)|^2 \mu(dx).$$

Ici, on va introduire le transport optimal entre la loi du processus non linéaire P_t et la mesure empirique $\nu_t^n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \delta_{\overline{X}^i}$.

Problème : on va avoir besoin d'une proprit de mesurabilit du transport optimal en t et en l'aléa ω.

Théorème 3 Considérons (E, Σ, m) un espace mesurable $\sigma-$fini.

Dans le cas d'unicité de la solution du problème de Monge, si μ_λ et ν_λ sont mesurables comme fonctions de $\lambda \in E$ et T_λ le transport optimal entre μ_λ et ν_λ. Alors il existe une fonction $(\lambda, x) \mapsto T(\lambda, x)$ mesurable et telle que $m(d\lambda)-$ pp.

$$T(\lambda, x) = T_\lambda(x) \quad \mu_\lambda(dx)\text{-p.s.}$$

En particulier, $T_\lambda(x)$ est mesurable pour la tribu complte de $\Sigma \otimes \mathcal{B}(\mathtt{R}^d)$ par rapport la mesure $m(d\lambda)\mu_\lambda(dx)$.

5. Construction du système de particules

Considérons n copies indépendantes du processus non linéaire

$$\overline{X}_t^i = X_0^i + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(\overline{X}_s^i - y) W_P^i(dy, ds) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} b(\overline{X}_s^i - y) P_s(dy) ds.$$

Théorème de Brenier $\Rightarrow \exists !$ transport optimal entre P_t et ν_t^n de la forme

$$\pi^{t,n}(dx, dy) = P_t(dx) \delta_{T^{t,n}(x)}(dy),$$

et donc

$$W_2^2(P_t, \nu_t^n) = \int_{\mathbb{R}^d} |x - T^{t,n}(x)|^2 P_t(dx).$$

Théorème de mesurabilité $\Rightarrow \exists$ un processus $(t, \omega, x) \to T^n(t, \omega, x)$ mesurable tq $T^n(t, \omega, x) = T^{t,\omega,n}(x)$ $P_t(dx)$-ps.

On définit pour $i, k = 1 \ldots n$

$$B_t^{ik,n}(\omega) = \sqrt{n} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{I}_{\{T^n(s,\omega,x) = \overline{X}_s^k(\omega)\}} W_P^i(dx, ds)$$

Proposition Les $B_t^{ik,n} = \sqrt{n} \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \mathbb{I}_{\{T^n(s,x)=X_s^k\}} W_P^i(dx, ds)$ sont n^2 mouvements browniens indépendants.

Le théorème principal découle facilement de la construction des particules :

$$
\begin{aligned}
\overline{X}_t^i &= X_0^i + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} \sigma(\overline{X}_s^i - y) W_P^i(dy, ds) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^d} b(\overline{X}_s^i - y) P_s(dy) ds \\
X_t^{i,n} &= X_0^i + \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^t \sum_{k=1}^n \sigma(X_s^{i,n} - X_s^{k,n}) dB_s^{ik} + \frac{1}{n} \int_0^t \sum_{k=1}^n b(X_s^{i,n} - X_s^{k,n}) ds
\end{aligned}
$$

7. Mise en application pour le processus de Landau

Le Processus de Landau est défini par

$$X_t = X_0 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \sigma(X_s - y) W_P(dy, ds) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} b(X_s - y) P_s(dy) ds$$

où $P_t = \mathcal{L}(X_t)$ et W_P est un Bruit Blanc sur $[0, \infty) \times \mathbb{R}^3$ de mesure de covariance $P_t(dy)dt$,

avec $\sigma(z) = |z|^{\gamma/2} \begin{bmatrix} z_2 & -z_3 & 0 \\ -z_1 & 0 & z_3 \\ 0 & z_1 & -z_2 \end{bmatrix}$ et $b(z) = -2|z|^\gamma z$.

Le système de particules

$$X_t^{i,n} \;=\; X_0^i + \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^t \sum_{k=1}^n \sigma(X_s^{i,n} - X_s^{k,n}) dB_s^{ik} + \frac{1}{n} \int_0^t \sum_{k=1}^n b(X_s^{i,n} - X_s^{k,n}) ds$$

que l'on discrétise par schéma d'Euler.

7. Mise en application pour le processus de Landau

Le Processus de Landau est défini par

$$X_t = X_0 + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} \sigma(X_s - y) W_P(dy, ds) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}^3} b(X_s - y) P_s(dy) ds$$

où $P_t = \mathcal{L}(X_t)$ et W_P est un Bruit Blanc sur $[0, \infty) \times \mathbb{R}^3$ de mesure de covariance $P_t(dy)dt$,

avec $\sigma(z) = |z|^{\gamma/2} \begin{bmatrix} z_2 & -z_3 & 0 \\ -z_1 & 0 & z_3 \\ 0 & z_1 & -z_2 \end{bmatrix}$ et $b(z) = -2|z|^\gamma z$.

Le système de particules

$$X_t^{i,n} = X_0^i + \frac{1}{\sqrt{n}} \int_0^t \sum_{k=1}^n \sigma(X_s^{i,n} - X_s^{k,n}) dB_s^{ik} + \frac{1}{n} \int_0^t \sum_{k=1}^n b(X_s^{i,n} - X_s^{k,n}) ds$$

que l'on discrétise par schéma d'Euler. $\rightsquigarrow$ Il y a encore du boulot !