Autour du Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire

Marianne Clausel
Université Paris XII
clausel@univ-paris12.fr

Introduction

- L'objectif de cet exposé est de définir et d'étudier le Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire.

Introduction

- L'objectif de cet exposé est de définir et d'étudier le Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire.
- Ce type de champ gaussien possède la propriété remarquable d'avoir des comportements différents suivant les échelles.

Introduction

- L'objectif de cet exposé est de définir et d'étudier le Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire.
- Ce type de champ gaussien possède la propriété remarquable d'avoir des comportements différents suivant les échelles.
- Suivant **la famille d'échelles** considérée, le degré d'irrégularité des trajectoires sera différent.

Introduction

- L'objectif de cet exposé est de définir et d'étudier le Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire.
- Ce type de champ gaussien possède la propriété remarquable d'avoir des comportements différents suivant les échelles.
- Suivant **la famille d'échelles** considérée, le degré d'irrégularité des trajectoires sera différent.
- L'exposant d'autosimilarité locale sera lui aussi dépendant en tout point de **la famille d'échelles caractéristique** choisie.

Introduction

- L'objectif de cet exposé est de définir et d'étudier le Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire.
- Ce type de champ gaussien possède la propriété remarquable d'avoir des comportements différents suivant les échelles.
- Suivant **la famille d'échelles** considérée, le degré d'irrégularité des trajectoires sera différent.
- L'exposant d'autosimilarité locale sera lui aussi dépendant en tout point de **la famille d'échelles caractéristique** choisie.
- Ceci impliquera la non-unicité en tout point du champ tangent.

Introduction

- L'objectif de cet exposé est de définir et d'étudier le Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire.
- Ce type de champ gaussien possède la propriété remarquable d'avoir des comportements différents suivant les échelles.
- Suivant **la famille d'échelles** considérée, le degré d'irrégularité des trajectoires sera différent.
- L'exposant d'autosimilarité locale sera lui aussi dépendant en tout point de **la famille d'échelles caractéristique** choisie.
- Ceci impliquera la non-unicité en tout point du champ tangent.
- On commence pour cela par se placer dans un cadre plus général et on introduit le Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles.

Le Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles (MBFIE)

Définition

Soit $\mathbf{H} = (H_j)_j$ une suite de réels compris entre 0 et 1 avec

$$0 < \liminf_{j\to+\infty} H_j \leq \limsup_{j\to+\infty} H_j < 1,$$

et une suite bornée $\sigma = (\sigma_j)_j$ de réels positifs.
On définit le MBFIE $\{B_{\mathbf{H},\sigma}(t)\}_{t\in\mathbb{R}^d}$ **d'indices de Hurst H** et d'**amplitudes** σ par

$$B_{\mathbf{H},\sigma}(t) = \int_{|\xi|<1} \frac{e^{it.\xi}-1}{|\xi|^{H_\ell+\frac{d}{2}}} d\widehat{W}(\xi) + \sum_{\ell=1}^{+\infty} \sigma_\ell \int_{2^{\ell-1}<|\xi|<2^\ell} \frac{e^{it.\xi}-1}{|\xi|^{H_\ell+\frac{d}{2}}} d\widehat{W}(\xi). \tag{1}$$

Le Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles (MBFIE)

Définition

- Le MBFIE est une version légèrement modifiée du Mouvement Brownien Multi-échelles de P.Bertrand et J.M.Bardet.

Le Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles (MBFIE)

Définition

- Le MBFIE est une version légèrement modifiée du Mouvement Brownien Multi-échelles de P.Bertrand et J.M.Bardet.
- Si pour tout entier j, $\sigma_j = 1$, on retrouve un cas particulier du **Mouvement Brownien Multifractionnaire Généralisé** défini par A.Ayache et J.Lévy-Véhel.

Le Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles (MBFIE)

Définition

- Le MBFIE est une version légèrement modifiée du Mouvement Brownien Multi-échelles de P.Bertrand et J.M.Bardet.
- Si pour tout entier j, $\sigma_j = 1$, on retrouve un cas particulier du **Mouvement Brownien Multifractionnaire Généralisé** défini par A.Ayache et J.Lévy-Véhel.
- La suite d'amplitudes $\sigma = (\sigma_j)_j$ en prenant, pour certaines valeurs de j, $\sigma_j = 0$ va permettre de **lacunariser** la densité spectrale et d'obtenir ainsi des champs possédant des propriétés particulières.

Le Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles (MBFIE)

Régularité locale des trajectoires du MBFIE

Proposition

Le MBFIE $\{B_{\mathbf{H},\sigma}(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}$ d'indices de Hurst $\mathbf{H} = (H_j)_j$ et d'amplitudes $\sigma = (\sigma_j)_j$ a p.s. pour exposant de Hölder uniforme local

$$\underline{H} = \liminf_{j\to+\infty}(H_j).$$

Le Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles (MBFIE)

Deux situations bien différentes

- Ce résultat de régularité uniforme peut recouvrir des **réalités très différentes** au niveau de **l'irrégularité** des trajectoires.

Le Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles (MBFIE)

Deux situations bien différentes

- Ce résultat de régularité uniforme peut recouvrir des **réalités très différentes** au niveau de **l'irrégularité** des trajectoires.
- Pour illustrer cette idée on va considérer deux cas particuliers de MBFIE : le MBF classique et un Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire (MBFL).

Le Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles (MBFIE)

Deux situations bien différentes

- Si pour tout j, $\sigma_j = 1$ et $H_j = H$ le MBFIE d'indices de Hurst **H** et d'amplitudes σ est le **MBF** classique.

Le Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles (MBFIE)

Deux situations bien différentes

- Si pour tout j, $\sigma_j = 1$ et $H_j = H$ le MBFIE d'indices de Hurst $\mathbf{H}$ et d'amplitudes σ est le **MBF** classique.
- Dans ce cas **toutes les échelles jouent le même rôle**. On sait que p.s.

$$\forall r \in (0, r_0),\ \forall x \in B_d(0,1),\ \sup_{y \in B_d(x,r)} |B_H(x) - B_H(y)| \geq C_0 \frac{r^H}{|\log(r)|^{\frac{1}{2}}},$$

pour une certaine variable aléatoire p.s positive r_0.

Le Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles (MBFIE)

Deux situations bien différentes

- Si pour tout j, $\sigma_j = 1$ et $H_j = H$ le MBFIE d'indices de Hurst **H** et d'amplitudes σ est le **MBF** classique.
- Dans ce cas **toutes les échelles jouent le même rôle**. On sait que p.s.

$$\forall r \in (0, r_0),\, \forall x \in B_d(0,1),\, \sup_{y \in B_d(x,r)} |B_H(x) - B_H(y)| \geq C_0 \frac{r^H}{|\log(r)|^{\frac{1}{2}}},$$

  pour une certaine variable aléatoire p.s positive r_0.
- Le degré d'irrégularité des trajectoires est **le même à toutes les échelles**.

Le Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles (MBFIE)

Deux situations bien différentes

- Par contre, si pour un certain réel $\beta > 1$, on a,

  $$\sigma = (2^{\ell_n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ avec pour tout entier } n,\ \ell_n = [\beta^n],\ \mathbf{H} \equiv H,$$

  le MBFIE est ce qu'on va appeler un **Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire** (MBFL) d'indice de Hurst H et d'indice de lacunarité β.

Le Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles (MBFIE)

Deux situations bien différentes

- Par contre, si pour un certain réel $\beta > 1$, on a,

$$\sigma = (2^{\ell_n})_{n \in \mathbb{N}} \text{ avec pour tout entier } n,\ \ell_n = [\beta^n],\ \mathbf{H} \equiv H,$$

  le MBFIE est ce qu'on va appeler un **Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire** (MBFL) d'indice de Hurst H et d'indice de lacunarité β.
- La suite d'échelles $(2^{-\ell_n})_{n \in \mathbb{N}}$ est **une première suite d'échelles caractéristiques**. Le degré de régularité des trajectoires suivant ces échelles est **exactement** H.

Le Mouvement Brownien Fractionnaire à Infinité d'Echelles (MBFIE)

Deux situations bien différentes

- Par contre, si pour un certain réel $\beta > 1$, on a,

  $$\sigma = (2^{\ell_n})_{n\in\mathbb{N}} \text{ avec pour tout entier } n,\ \ell_n = [\beta^n],\ \mathbf{H} \equiv H,$$

  le MBFIE est ce qu'on va appeler un **Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire** (MBFL) d'indice de Hurst H et d'indice de lacunarité β.
- La suite d'échelles $(2^{-\ell_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est **une première suite d'échelles caractéristiques**. Le degré de régularité des trajectoires suivant ces échelles est **exactement** H.
- Il va exister **une autre suite d'échelles caractéristique** qui est une suite d'échelles intermédiaires $(2^{-j_n})_{n\in\mathbb{N}}$ pour laquelle le degré de régularité des trajectoires est **supérieure** à H.

Une notion d'irrégularité uniforme

Pour **décrire** les propriétés de régularité des trajectoires du MBFL, on va introduire la notion d'**irrégularité uniforme**.

Définition

- *La fonction f de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ sera dite irrégulière d'exposant $\alpha \in (0,1)$ si,*

$$\forall r \in (0, r_0), \sup_{|x-y| \leq r} |f(x) - f(y)| \geq C_0 r^\alpha.$$

pour une certaine constante positive C_0. On notera $f \in I^\alpha(\mathbb{R}^d)$.

Une notion d'irrégularité uniforme

Pour **décrire** les propriétés de régularité des trajectoires du MBFL, on va introduire la notion d'**irrégularité uniforme**.

Définition

- *La fonction f de $L^\infty(\mathbb{R}^d)$ sera dite irrégulière d'exposant $\alpha \in (0,1)$ si,*

$$\forall r \in (0, r_0), \sup_{|x-y|\leq r} |f(x) - f(y)| \geq C_0 r^\alpha.$$

  pour une certaine constante positive C_0. On notera $f \in I^\alpha(\mathbb{R}^d)$.
- *L'exposant $\mathcal{I}_f$ d'irrégularité uniforme de la fonction f est alors défini par $\mathcal{I}_f = \inf\{\alpha,\ f \in I^\alpha(\mathbb{R}^d)\}$.*

Une notion d'irrégularité uniforme

Si f n'est pas uniformément irrégulière d'exposant α pour tout $C > 0$ il existe une **suite d'échelles privilégiée** telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sup_{|x-y| \leq r_n} |f(x) - f(y)| \leq C r_n^{\alpha}.$$

Un Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire

Définition

Soit $0 < \underline{H} < \overline{H} < 1$. On pose $\beta_1 = \frac{\overline{H}}{\underline{H}}$, $\beta_2 = \frac{1-\underline{H}}{1-\overline{H}}$, $\gamma > 0$.

On définit le Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire suivant

$$\begin{aligned} B_{\underline{H},\overline{H},\beta}(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2^{-j_n-1}<|\xi|<2^{-j_n}} \frac{e^{ix\xi}-1}{|\xi|^{\overline{H}+\frac{d}{2}}} d\widehat{W}_\xi \\ &+ \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2^{-\ell_n-1}<|\xi|<2^{-\ell_n}} \frac{e^{ix\xi}-1}{|\xi|^{\underline{H}+\frac{d}{2}}} d\widehat{W}_\xi \end{aligned} \tag{2}$$

les deux suites $(j_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(\ell_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant définies par $j_0 = 1$ et

$$\forall n \geq 1,\ \ell_n = \beta_1 j_n + \gamma \log(j_n),\ j_{n+1} = \beta_2 \ell_n + \gamma \log(\ell_n).$$

Un Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire

Irrégularité uniforme des trajectoires

Proposition

Le Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire défini par l'équation (2) a presque sûrement pour exposants de régularité et d'irrégularité uniforme local les réels $\underline{H}$ et $\overline{H}$ respectivement.

Un Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire

Propriétés d'autosimilarité asymptotique locale

Définition

Soit $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite strictement décroissante de réels positifs. Un champ* $\{X(x)\}_{x\in\mathbb{R}}$ *est asymptotiquement localement autosimilaire d'exposant* H *en* x_0 *suivant la famille d'échelles* $(\rho_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *si et seulement si le champ* $\left\{\dfrac{X(x_0+\rho_n u)-X(x_0)}{\rho_n^H}\right\}_{u\in\mathbb{R}}$ *converge en distribution vers une limite non triviale quand* n *tend vers* $+\infty$.

Un Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire

Propriétés d'autosimilarité asymptotique locale

Proposition

- *Le champ* $\{B_{\underline{H},\overline{H},\beta}(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}$ *défini par l'équation (2) est asymptotiquement localement autosimilaire d'exposant* $\overline{H}$ *en tout point* x_0 *suivant la famille d'échelles* $(\rho_{n,1})_{n\in\mathbb{N}} = (2^{-j_n})_n$.

Un Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire

Propriétés d'autosimilarité asymptotique locale

Proposition

- *Le champ* $\{B_{\underline{H},\overline{H},\beta}(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}$ *défini par l'équation (2) est asymptotiquement localement autosimilaire d'exposant* $\overline{H}$ *en tout point* x_0 *suivant la famille d'échelles* $(\rho_{n,1})_{n\in\mathbb{N}} = (2^{-j_n})_n$.
- *Le champ* $\{B_{\underline{H},\overline{H},\beta}(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}$ *défini par l'équation (2) est asymptotiquement localement autosimilaire d'exposant* $\underline{H}$ *en tout point* x_0 *suivant la famille d'échelles* $(\rho_{n,2})_{n\in\mathbb{N}} = (2^{-\ell_n})_n$.

Un Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire

Propriétés d'autosimilarité asymptotique locale

Plus précisément, posons

$$\widetilde{B}_{\underline{H}}(t) = \int\limits_{\frac{1}{2}<|\xi|<1} \frac{e^{it\xi}-1}{|\xi|^{\underline{H}+\frac{d}{2}}} d\widehat{W}(\xi),\ \widetilde{B}_{\overline{H}}(t) = \int\limits_{\frac{1}{2}<|\xi|<1} \frac{e^{it\xi}-1}{|\xi|^{\overline{H}+\frac{d}{2}}} d\widehat{W}(\xi), \tag{3}$$

Un Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire

Propriétés d'autosimilarité asymptotique locale

Alors pour tout x_0

- $$\lim_{n\to+\infty}\left\{\frac{B_{\underline{H},\overline{H},\beta}(x_0+2^{-\ell_n}u)-B_{\underline{H},\overline{H},\beta}(x_0)}{2^{-\ell_n\underline{H}}}\right\}_{u\in\mathbb{R}^d}=\{\widetilde{B}_{\underline{H}}(u)\}_{u\in\mathbb{R}^d}$$

Un Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire

Propriétés d'autosimilarité asymptotique locale

Alors pour tout x_0

- $$\lim_{n\to+\infty}\left\{\frac{B_{\underline{H},\overline{H},\beta}(x_0+2^{-\ell_n}u)-B_{\underline{H},\overline{H},\beta}(x_0)}{2^{-\ell_n\underline{H}}}\right\}_{u\in\mathbb{R}^d}=\{\widetilde{B}_{\underline{H}}(u)\}_{u\in\mathbb{R}^d}$$

- $$\lim_{n\to+\infty}\left\{\frac{B_{\underline{H},\overline{H},\beta}(x_0+2^{-j_n}u)-B_{\underline{H},\overline{H},\beta}(x_0)}{2^{-j_n\overline{H}}}\right\}_{u\in\mathbb{R}^d}=\{\widetilde{B}_{\overline{H}}(u)\}_{u\in\mathbb{R}^d}$$

Un Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire

Notion de champ tangent (K.Falconer (2002),(2003))

La notion de champ tangent a été définie par K.Falconer (2002).

Définition

Soit $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}^d}$ *un champ à trajectoires continues. Le champ* $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}^d}$ *s'annulant p.s. à l'origine est un champ tangent en* x_0 *au champ aléatoire* $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}^d}$ *s'il existe deux suites d'***échelles** *décroissant vers* 0, $(\rho_{1,n})_n$ *et* $(\rho_{2,n})_n$ *telles que,*

$$\left\{\lim_{n\to+\infty}\frac{X(x_0+\rho_{1,n}t)-X(x_0)}{\rho_{2,n}}\right\}_{t\in\mathbb{R}^d}=\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}^d}. \qquad (4)$$

où la limite est prise au sens de la convergence en distribution.

Un Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire

Notion de champ tangent (K.Falconer (2002),(2003))

- On appelera **espace tangent** d'un champ $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}^d}$, et on notera $Tan(X, x_0)$, l'ensemble de tous les champs tangents à $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}^d}$ en x_0.

Un Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire

Notion de champ tangent (K.Falconer (2002),(2003))

- On appelera **espace tangent** d'un champ $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}^d}$, et on notera $Tan(X, x_0)$, l'ensemble de tous les champs tangents à $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}^d}$ en x_0.
- Si λ est une constante positive et si $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}^d}$ est un champ tangent au champ aléatoire $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}^d}$ alors le champ $\{\lambda Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}^d}$ est lui aussi un champ tangent au champ aléatoire $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}^d}$.

Un Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire

Notion de champ tangent (K.Falconer (2002),(2003))

- On parle d'**unicité** du champ tangent à X en x_0 si

$$Tan(X, x_0) = \{\lambda Y',\ Y' \overset{(\mathcal{L})}{=} Y\},$$

pour un certain champ aléatoire Y.
On dira aussi que $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}^d}$ est **l'unique champ tangent** au champ aléatoire $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}^d}$.

Un Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire

Notion de champ tangent (K.Falconer (2002),(2003))

- On parle d'**unicité** du champ tangent à X en x_0 si

$$Tan(X, x_0) = \{\lambda Y',\ Y' \overset{(\mathcal{L})}{=} Y\},$$

  pour un certain champ aléatoire Y.
  On dira aussi que $\{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}^d}$ est **l'unique champ tangent** au champ aléatoire $\{X(t)\}_{t\in\mathbb{R}^d}$.
- Le champ X admet **plusieurs champs tangents** en x_0 s'il n'y a pas unicité du champ tangent à X en x_0.

Un Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire

Notion de champ tangent (K.Falconer (2002),(2003))

K.Falconer a montré le résultat suivant dans le cas gaussien :

Théorème

Soit X un champ gaussien. Pour presque tout point x_0 où le champ X admet un unique champ tangent noté Y_{x_0} alors :

- *Soit il existe un vecteur aléatoire gaussien d-dimensionnel Z_{x_0} telle qu'on ait p.s.,*

$$Y_{x_0}(t) = t.Z_{x_0}$$

pour tout point t de $\mathbb{R}^d$.

Un Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire

Notion de champ tangent (K.Falconer (2002),(2003))

K.Falconer a montré le résultat suivant dans le cas gaussien :

Théorème

Soit X un champ gaussien. Pour presque tout point x_0 où le champ X admet un unique champ tangent noté Y_{x_0} alors :

- *Soit il existe un vecteur aléatoire gaussien d-dimensionnel Z_{x_0} telle qu'on ait p.s.,*
$$Y_{x_0}(t) = t.Z_{x_0}$$
pour tout point t de $\mathbb{R}^d$.
- *Soit il existe $H \in (0,1)$ tel que pour tout $t \neq 0$, le processus aléatoire $\{Y_{x_0}(rt)\}_{r\in\mathbb{R}}$ est (à une multiplication par un scalaire près) un Mouvement Brownien Fractionnaire d'indice H.*

Un Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire

Champs tangents au Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire

Proposition

Les deux champs gaussiens $\{\widetilde{B}_{\underline{H}}(t)\}_{t\in\mathbb{R}^d}$ *et* $\{\widetilde{B}_{\overline{H}}(t)\}_{t\in\mathbb{R}^d}$ *définis par l'équation (3) sont deux champs tangents au Mouvement Brownien Fractionnaire Lacunaire* $\{B_{\underline{H},\overline{H},\beta}(x)\}_{x\in\mathbb{R}^d}$ *défini par l'équation (2) qui* **admet ainsi en tout point plusieurs champs tangents qui ne sont pas des Mouvements Browniens Fractionnaires**.