AUTOMATES CELLULAIRES & ANNIHILATION BALLISTIQUE BRANCHANTE

PHILIPPE CHASSAING, LUCAS GERIN, MAXIM KRIKUN

INSTITUT ELIE CARTAN

Institut ELIE CARTAN

SERGUEI POPOV

IME-USP

IME - Instituto de Matemática e Estatística

USP - Universidade de São Paulo

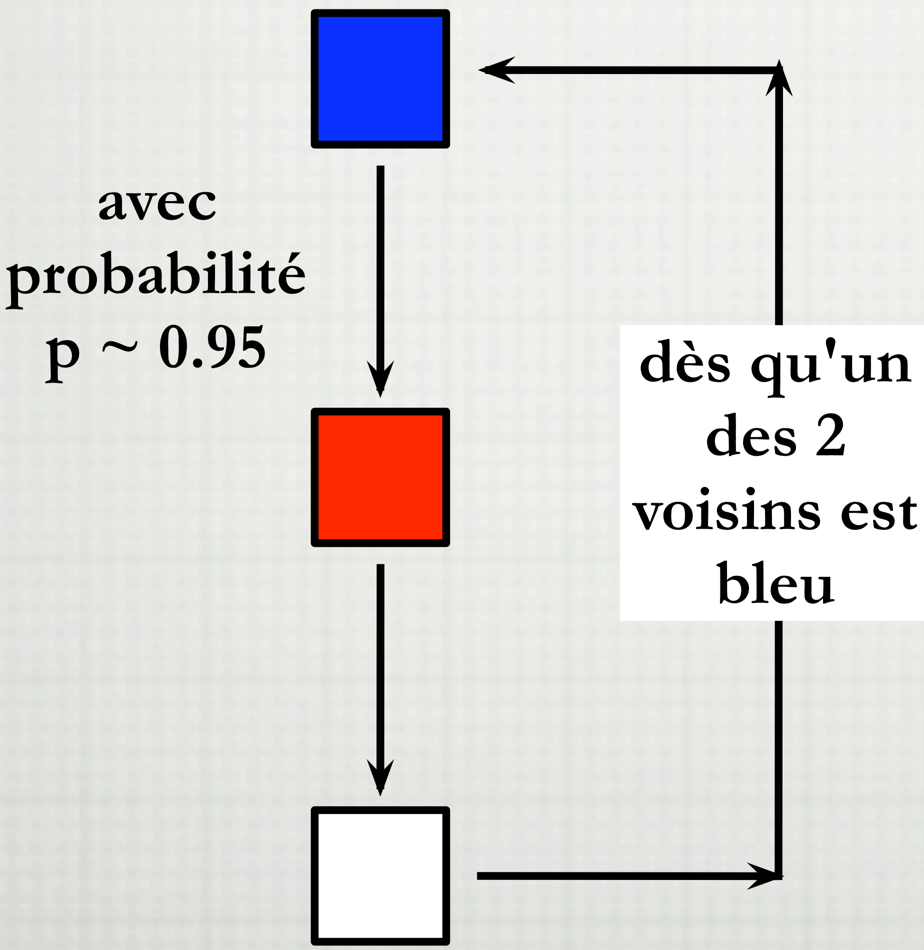
Lille, Journées de Probabilités 2008

UN AUTOMATE CELLULAIRE SIMPLE

Regardons Z comme un ensemble de cellules pouvant prendre les couleurs

- bleu,
- blanc,
- rouge,

selon la règle ci-dessous :

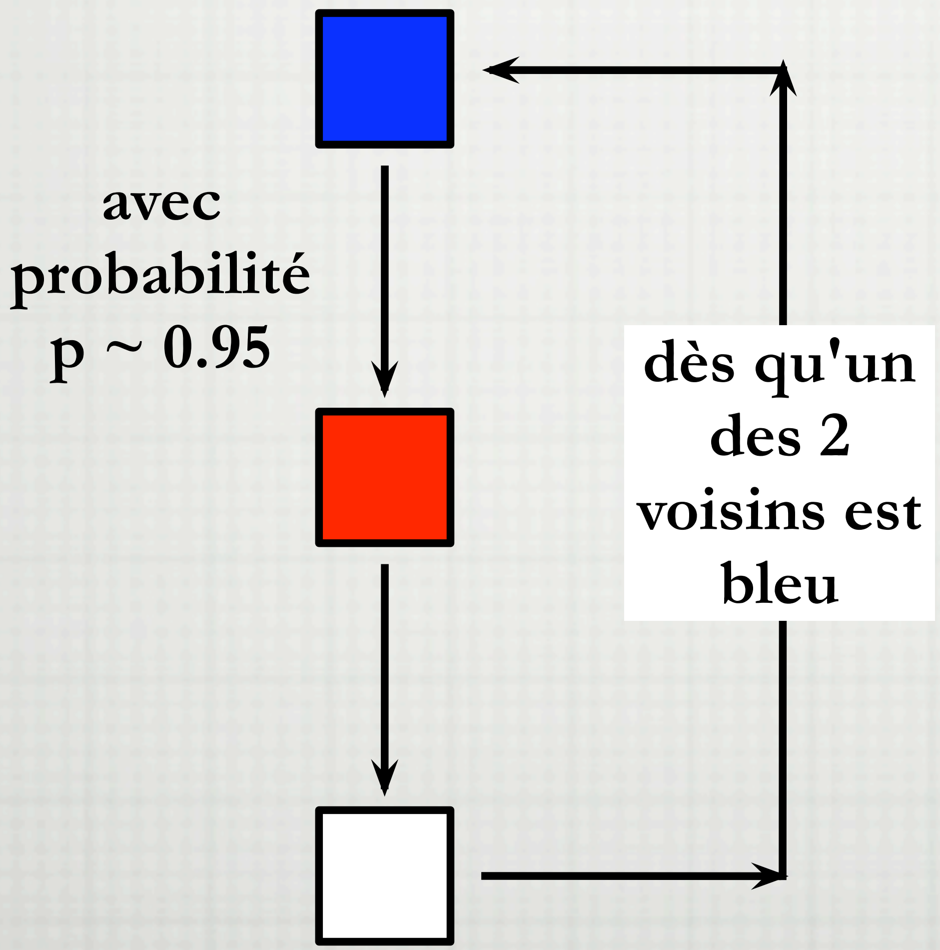


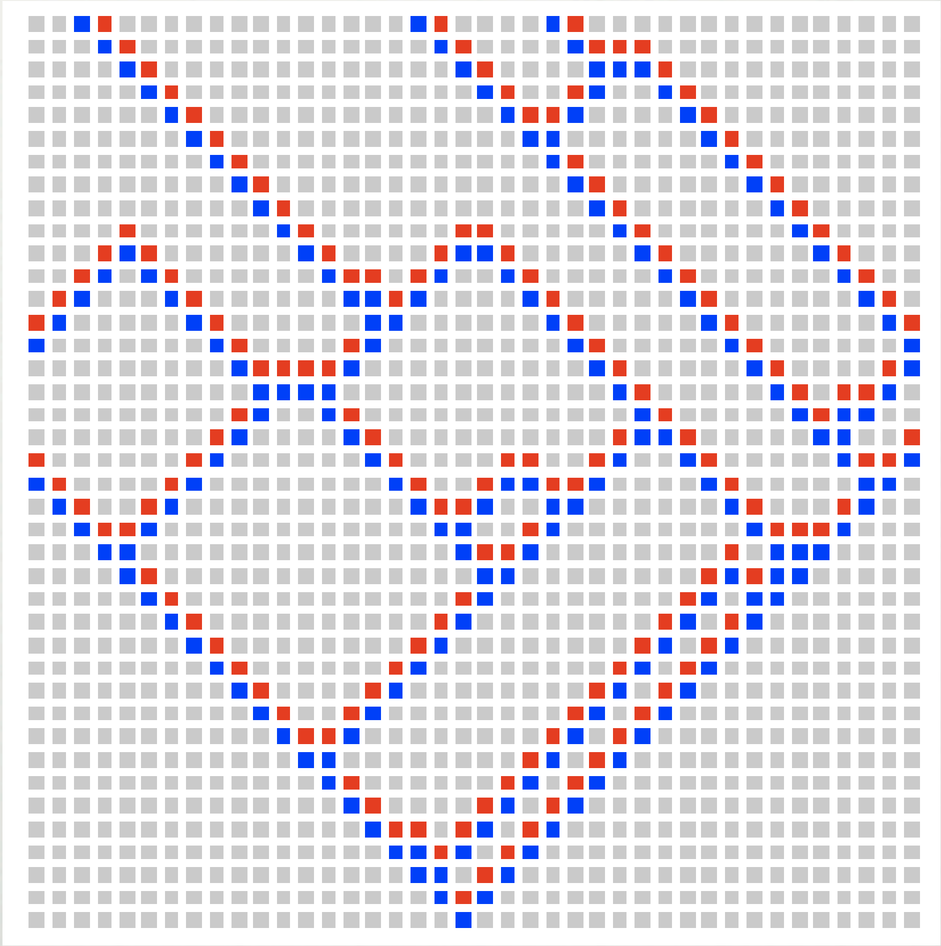
UN AUTOMATE CELLULAIRE SIMPLE

Regardons Z comme un ensemble de cellules pouvant prendre les couleurs

- bleu,
- blanc,
- rouge,

selon la règle ci-dessous :





MOTIVATION

AUTOMATES CELLULAIRES

- Pour certains informaticiens (Schabanel, Fates, Bournez, etc ...), il s'agit d'étudier l'effet de règles locales sur le comportement global du système.

MOTIVATION

AUTOMATES CELLULAIRES

- Pour certains informaticiens (Schabanel, Fates, Bournez, etc ...), il s'agit d'étudier l'effet de règles locales sur le comportement global du système.
- Idée : le parallélisme, et particulièrement faire travailler ensemble des agents (processeurs) séparés sans dépenser de temps ni de ressource pour la coordination entre ces agents.

MOTIVATION

AUTOMATES CELLULAIRES

- Pour certains informaticiens (Schabanel, Fates, Bournez, etc ...), il s'agit d'étudier l'effet de règles locales sur le comportement global du système.
- Idée : le parallélisme, et particulièrement faire travailler ensemble des agents (processeurs) séparés sans dépenser de temps ni de ressource pour la coordination entre ces agents.
- Les automates 1-dimensionnels, 2-dimensionnels, synchrones, asynchrones exhibent des comportements très divers : jeu de la vie, incendie, etc ...

MOTIVATION

AUTOMATES CELLULAIRES

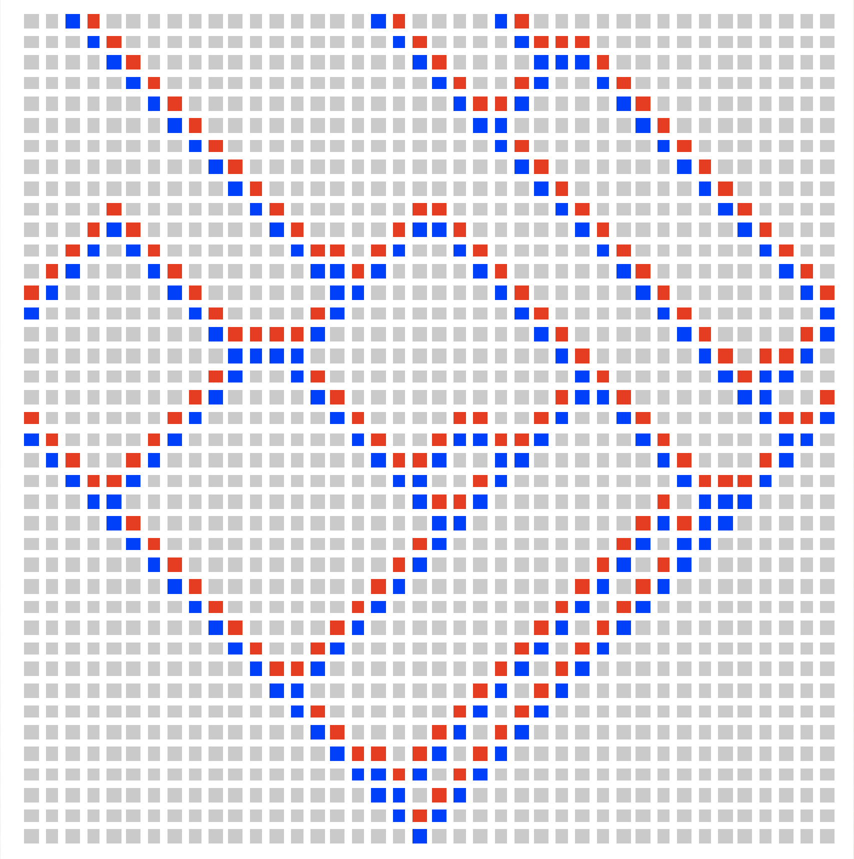
- Pour certains informaticiens (Schabanel, Fates, Bournez, etc ...), il s'agit d'étudier l'effet de règles locales sur le comportement global du système.
- Idée : le parallélisme, et particulièrement faire travailler ensemble des agents (processeurs) séparés sans dépenser de temps ni de ressource pour la coordination entre ces agents.
- Les automates 1-dimensionnels, 2-dimensionnels, synchrones, asynchrones exhibent des comportements très divers : jeu de la vie, incendie, etc ...

CE MODELE

- Ferrari, Belitsky, Blythe, Cafri, Evans, Cardy, ... l'utilisent pour la modélisation de réactions chimiques, du traffic automobile, etc ...

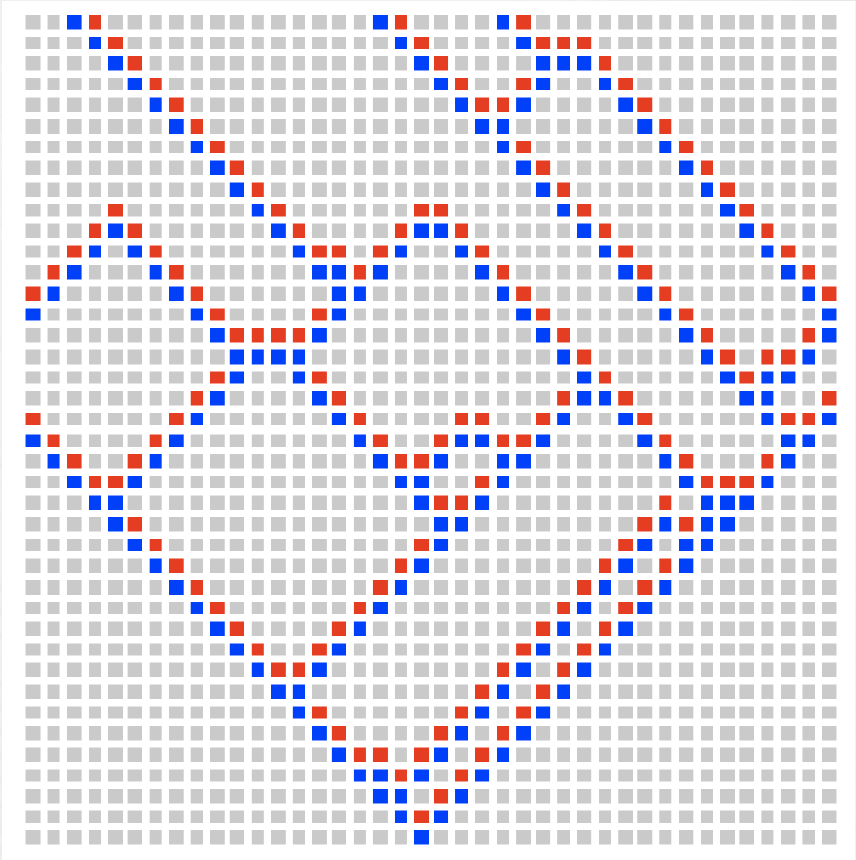
LE MODÈLE LIMITE

- Sur la droite réelle, coexistent deux sortes de particules :



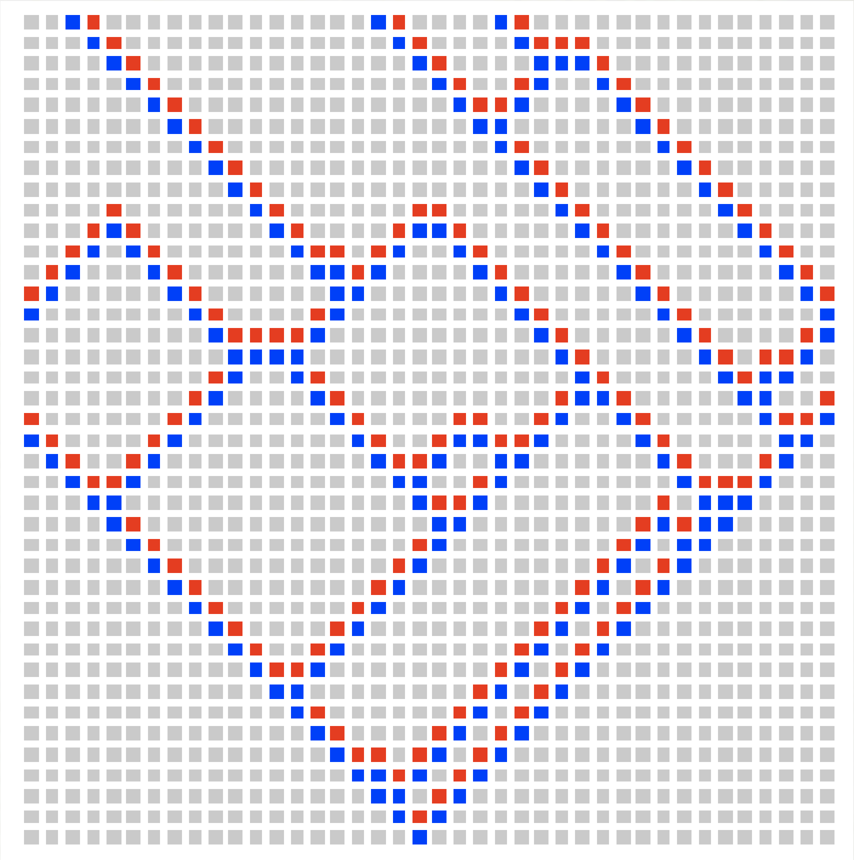
LE MODÈLE LIMITE

- Sur la droite réelle, coexistent deux sortes de particules :
  - les positives, qui se déplacent à la vitesse $+1$,



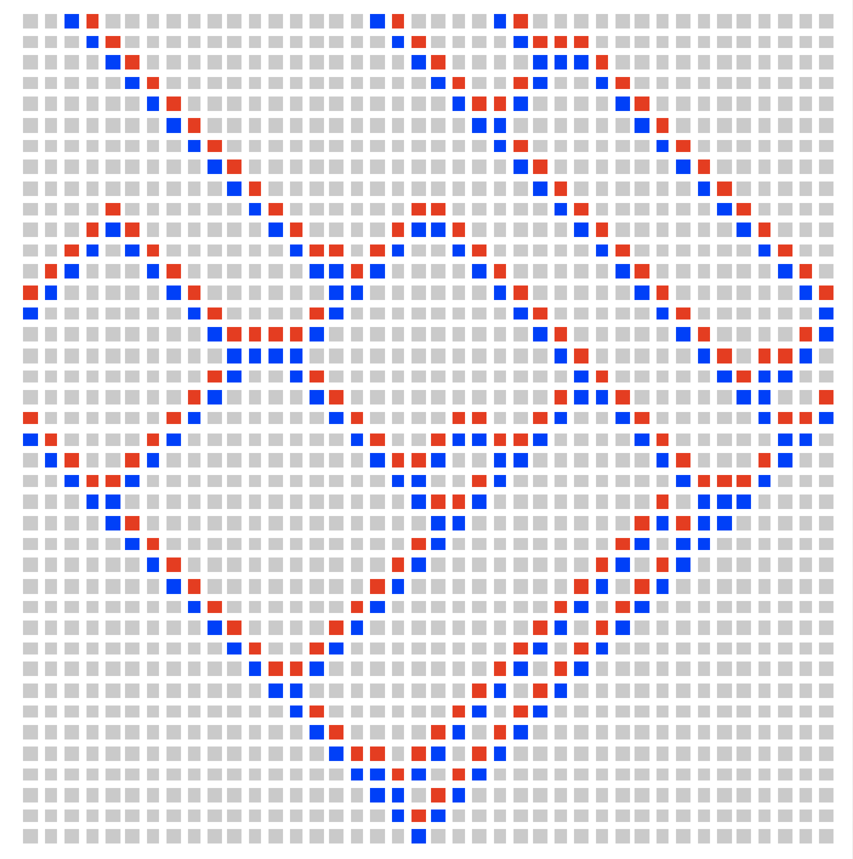
LE MODÈLE LIMITE

- Sur la droite réelle, coexistent deux sortes de particules :
  - les positives, qui se déplacent à la vitesse +1,
  - les négatives, qui se déplacent à la vitesse -1.



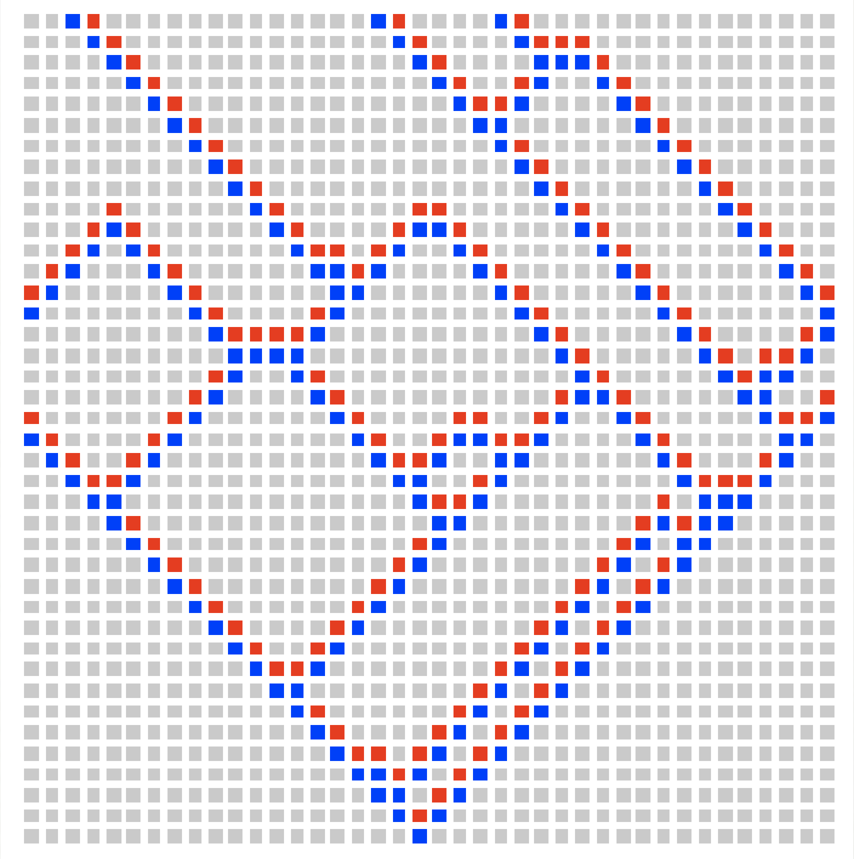
LE MODÈLE LIMITE

- Sur la droite réelle, coexistent deux sortes de particules :
  - les positives, qui se déplacent à la vitesse $+1$,
  - les négatives, qui se déplacent à la vitesse -1.
- En cas de collision, destruction des deux particules impliquées (annihilation ballistique).



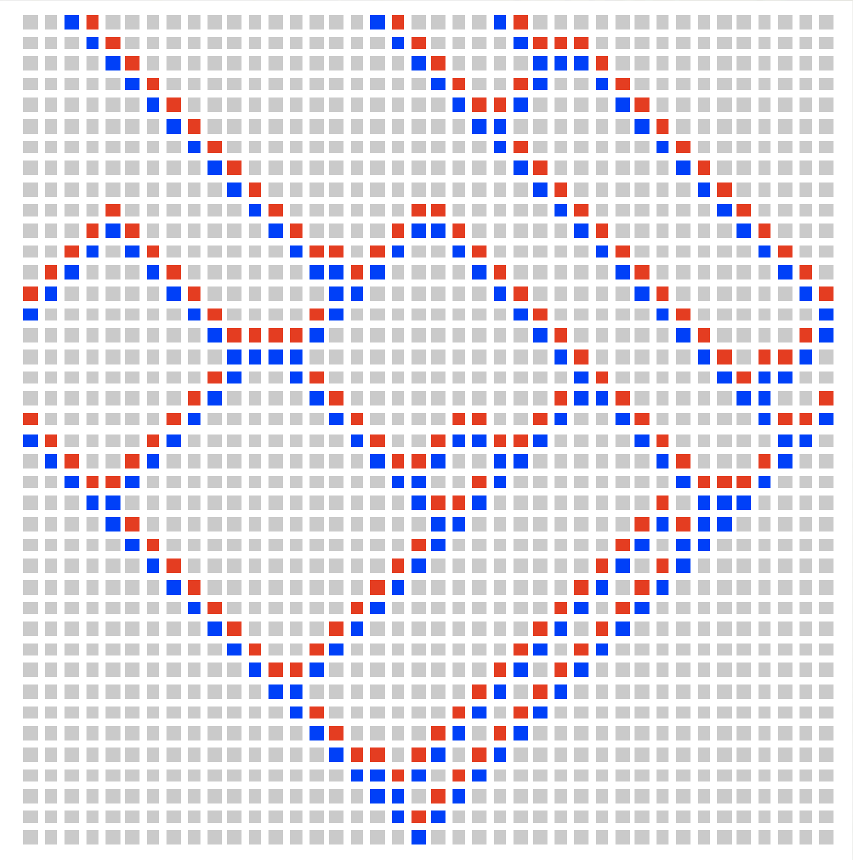
LE MODÈLE LIMITE

- Sur la droite réelle, coexistent deux sortes de particules :
  - les positives, qui se déplacent à la vitesse +1,
  - les négatives, qui se déplacent à la vitesse -1.
- En cas de collision, destruction des deux particules impliquées (annihilation ballistique).
- Branchement : chaque particule vivante donne naissance à une particule de signe opposé, au bout d'un temps exponentiel de paramètre 1.



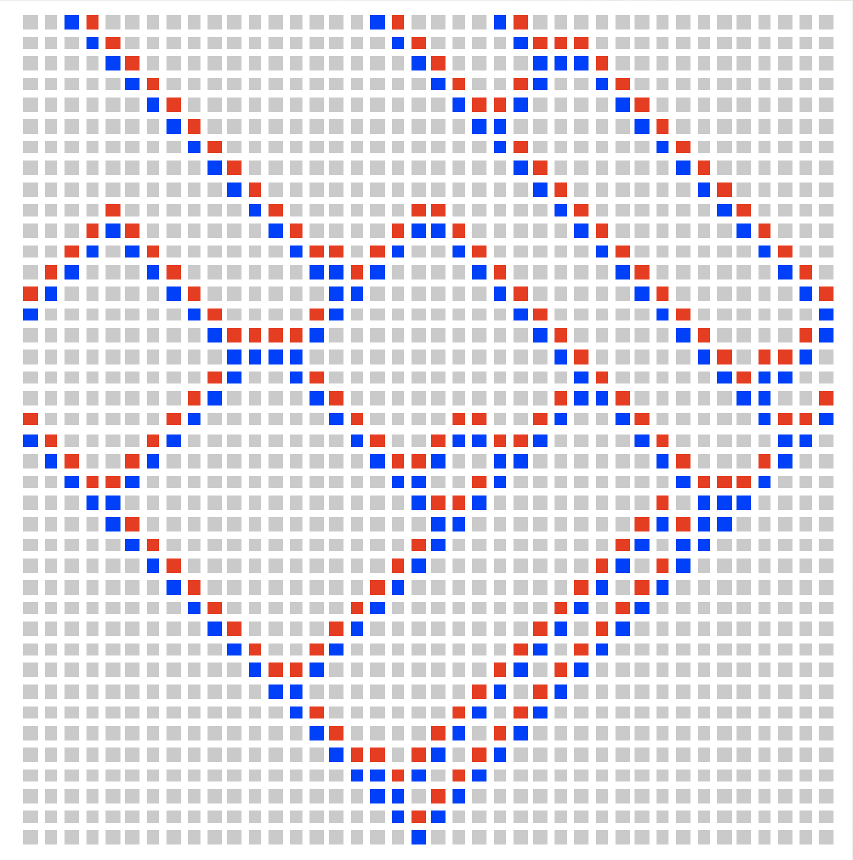
LE MODÈLE LIMITE

- Sur la droite réelle, coexistent deux sortes de particules :
  - les positives, qui se déplacent à la vitesse +1,
  - les négatives, qui se déplacent à la vitesse -1.
- En cas de collision, destruction des deux particules impliquées (annihilation ballistique).
- Branchement : chaque particule vivante donne naissance à une particule de signe opposé, au bout d'un temps exponentiel de paramètre 1.
- L'état du système au temps t, $X_t = (X_t^+, X_t^-)$, est un couple mesures ponctuelles.



LE MODÈLE LIMITE

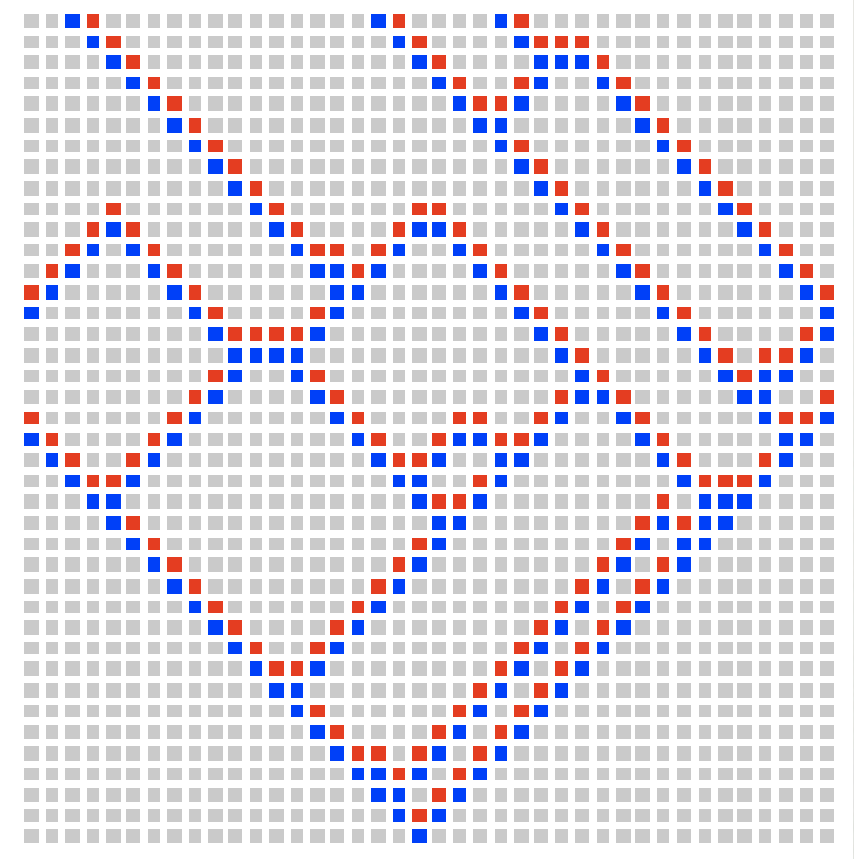
- Sur la droite réelle, coexistent deux sortes de particules :
  - les positives, qui se déplacent à la vitesse +1,
  - les négatives, qui se déplacent à la vitesse -1.
- En cas de collision, destruction des deux particules impliquées (annihilation ballistique).
- Branchement : chaque particule vivante donne naissance à une particule de signe opposé, au bout d'un temps exponentiel de paramètre 1.
- L'état du système au temps t, $X_t = (X_t^+, X_t^-)$, est un couple mesures ponctuelles.



- Ici $X_o = (\delta_o, \delta_o)$.

LE MODÈLE LIMITE

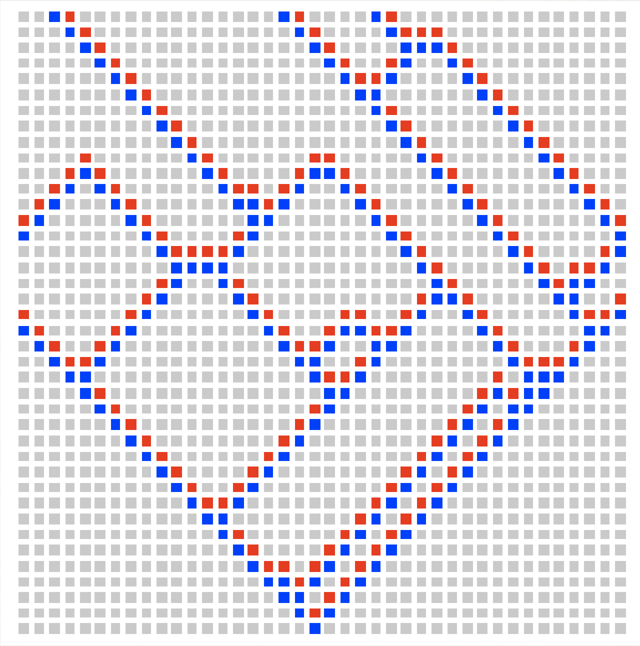
- Sur la droite réelle, coexistent deux sortes de particules :
  - les positives, qui se déplacent à la vitesse $+1$,
  - les négatives, qui se déplacent à la vitesse -1.
- En cas de collision, destruction des deux particules impliquées (annihilation ballistique).
- Branchement : chaque particule vivante donne naissance à une particule de signe opposé, au bout d'un temps exponentiel de paramètre 1.
- L'état du système au temps t, $X_t = (X_t^+, X_t^-)$, est un couple mesures ponctuelles.



- Ici $X_0 = (\delta_0, \delta_0)$.
- Loi de X_t ? Comportement asymptotique ?

ANNIHILATION BALLISTIQUE BRANCHANTE

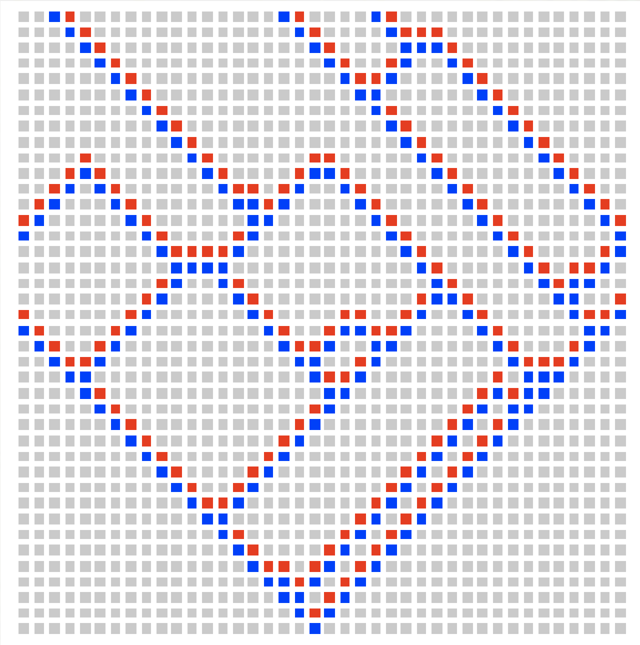
- Introduite par Cardy & Täuber (2008) ?



ANNIHILATION BALLISTIQUE BRANCHANTE

- Introduite par Cardy & Täuber (2008) ?

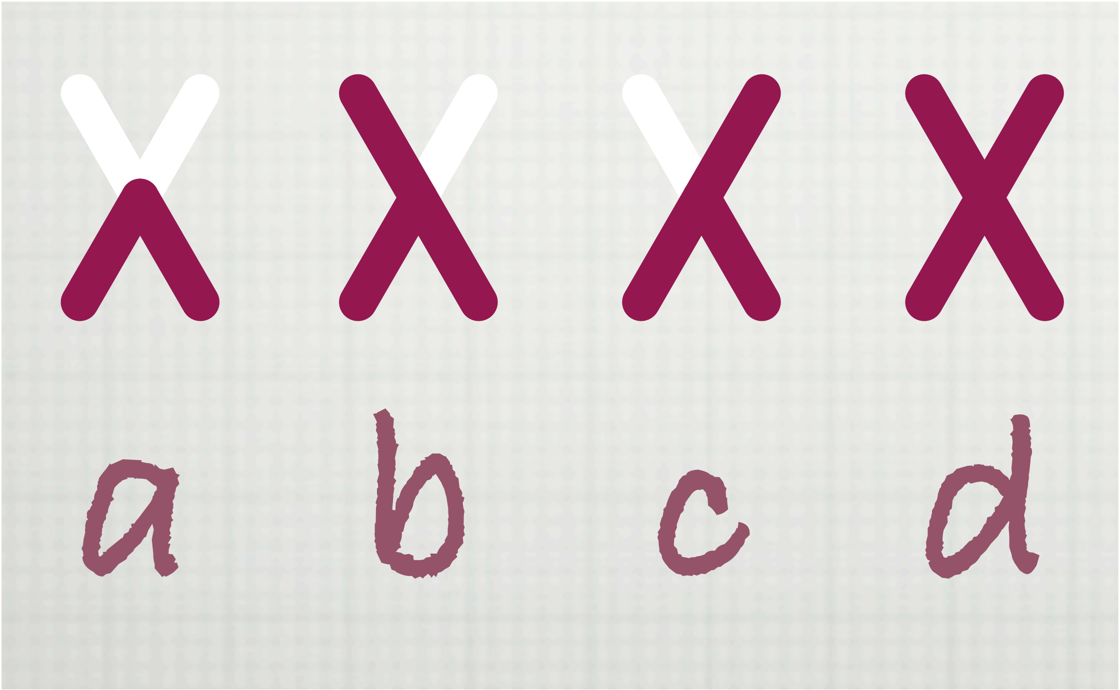
- Variante (1,0,0,0) de leur modèle plus général (a,b,c,d), a+b+c+d=1, où on envisage 4 types de comportement lors d'une collision :

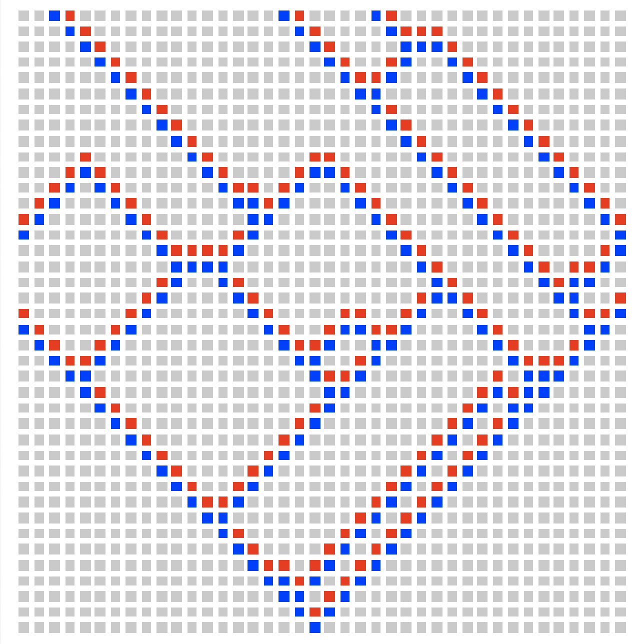


ANNIHILATION BALLISTIQUE BRANCHANTE

- Introduite par Cardy & Täuber (2008) ?

- Variante (1,0,0,0) de leur modèle plus général (a,b,c,d), a+b+c+d=1, où on envisage 4 types de comportement lors d'une collision :

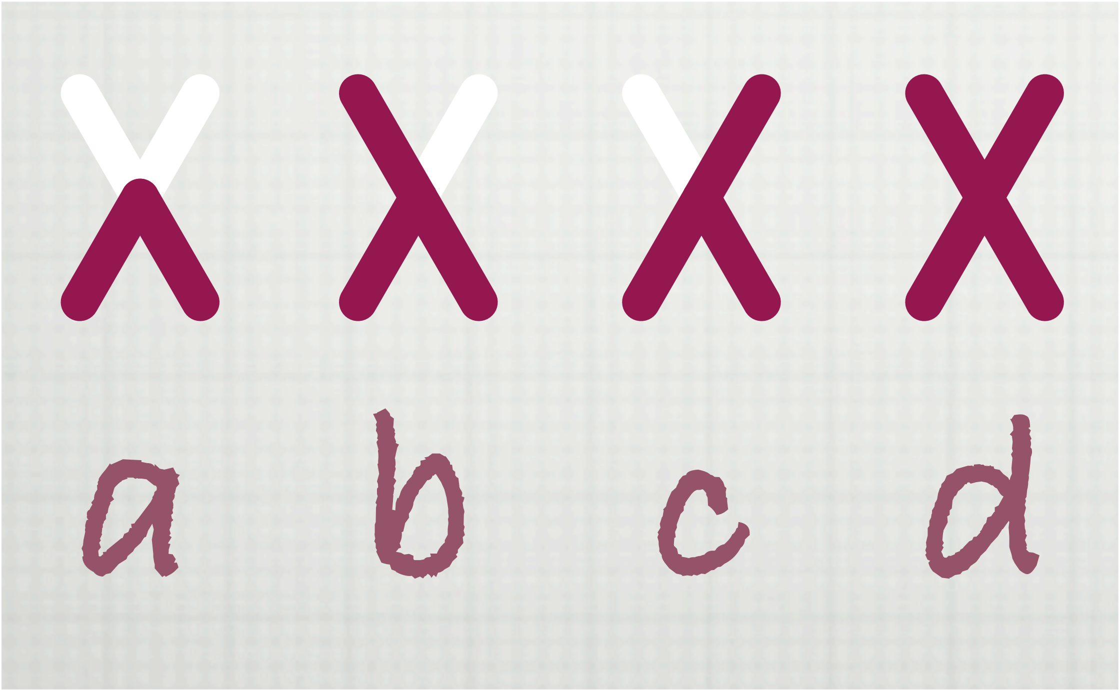


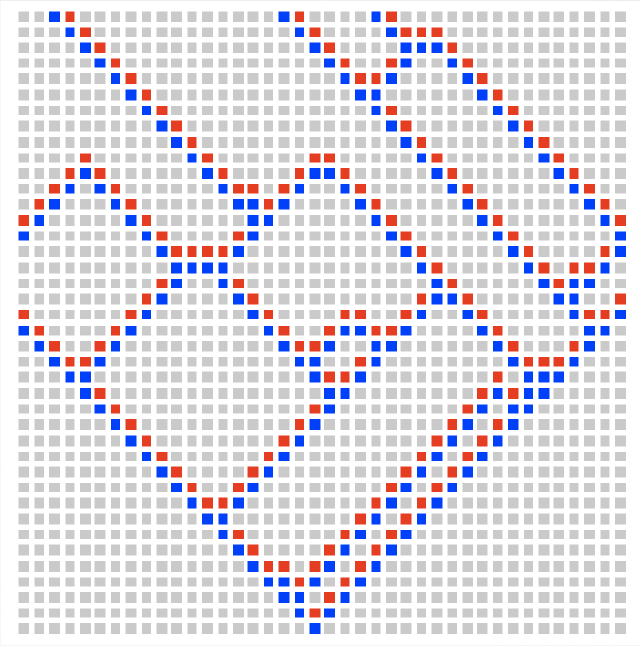


ANNIHILATION BALLISTIQUE BRANCHANTE

- Introduite par Cardy & Täuber (2008) ?

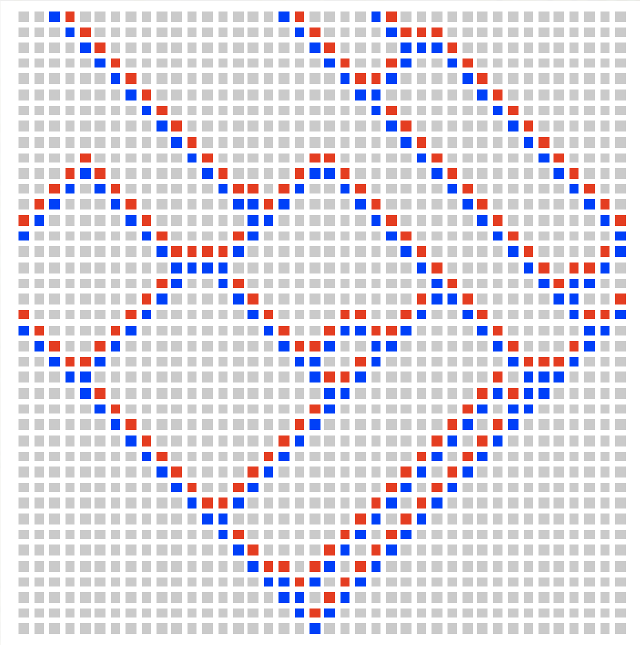
- Variante (1,0,0,0) de leur modèle plus général (a,b,c,d), a+b+c+d=1, où on envisage 4 types de comportement lors d'une collision :



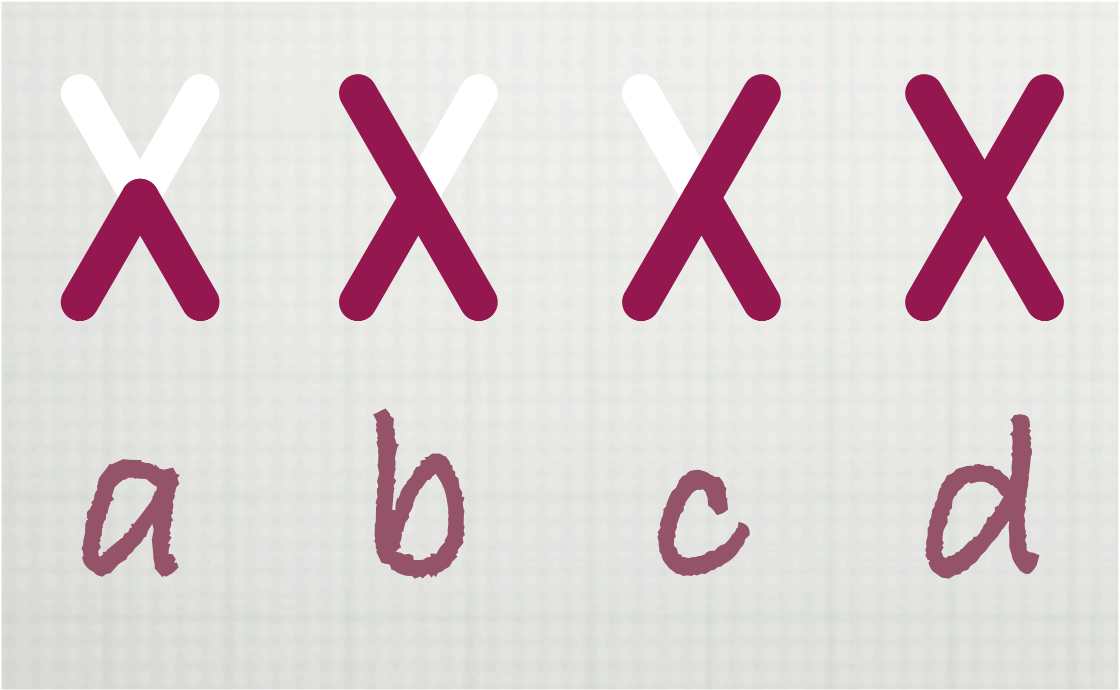


- Nous passerons en revue les cas

ANNIHILATION BALLISTIQUE BRANCHANTE



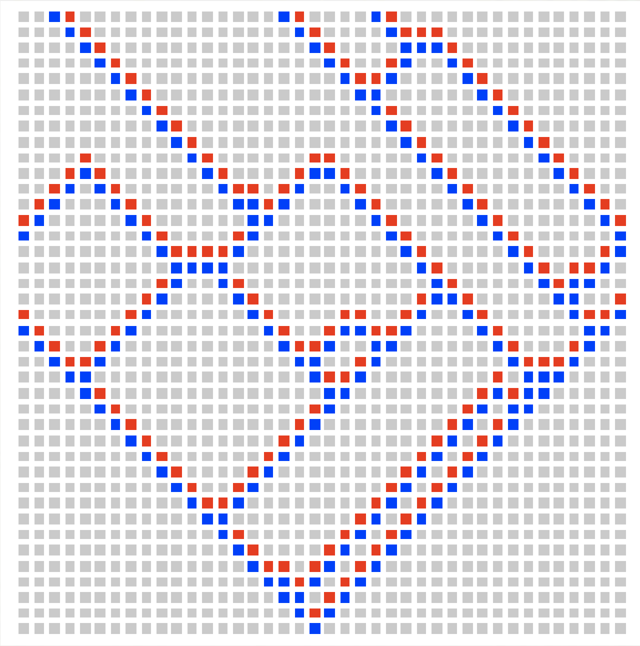
- Introduite par Cardy & Täuber (2008) ?
- Variante (1,0,0,0) de leur modèle plus général (a,b,c,d), a+b+c+d=1, où on envisage 4 types de comportement lors d'une collision :



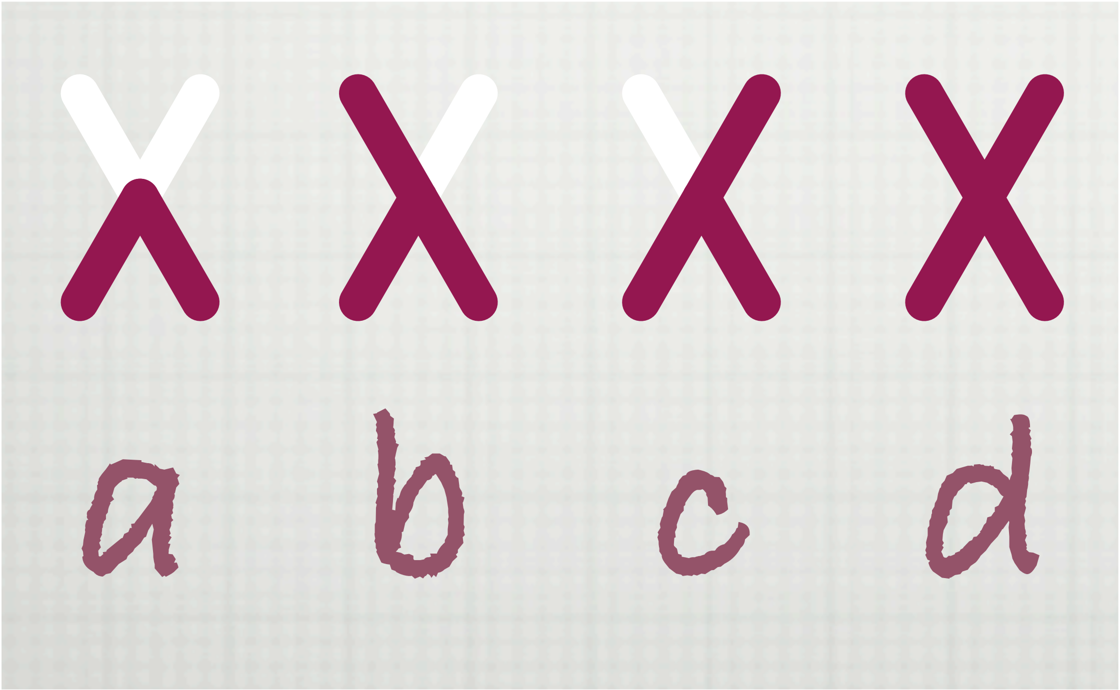
- Nous passerons en revue les cas
  - (0,0,0,1),

ANNIHILATION BALLISTIQUE BRANCHANTE

- Introduite par Cardy & Täuber (2008) ?



- Variante (1,0,0,0) de leur modèle plus général (a,b,c,d), a+b+c+d=1, où on envisage 4 types de comportement lors d'une collision :

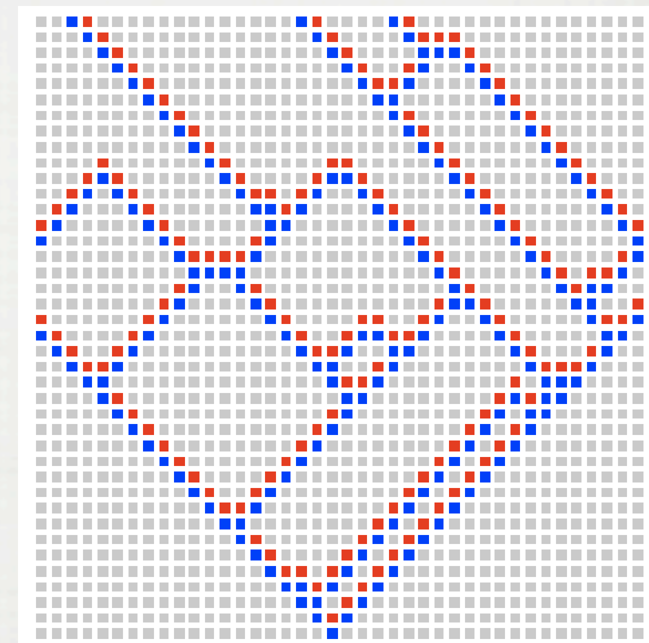


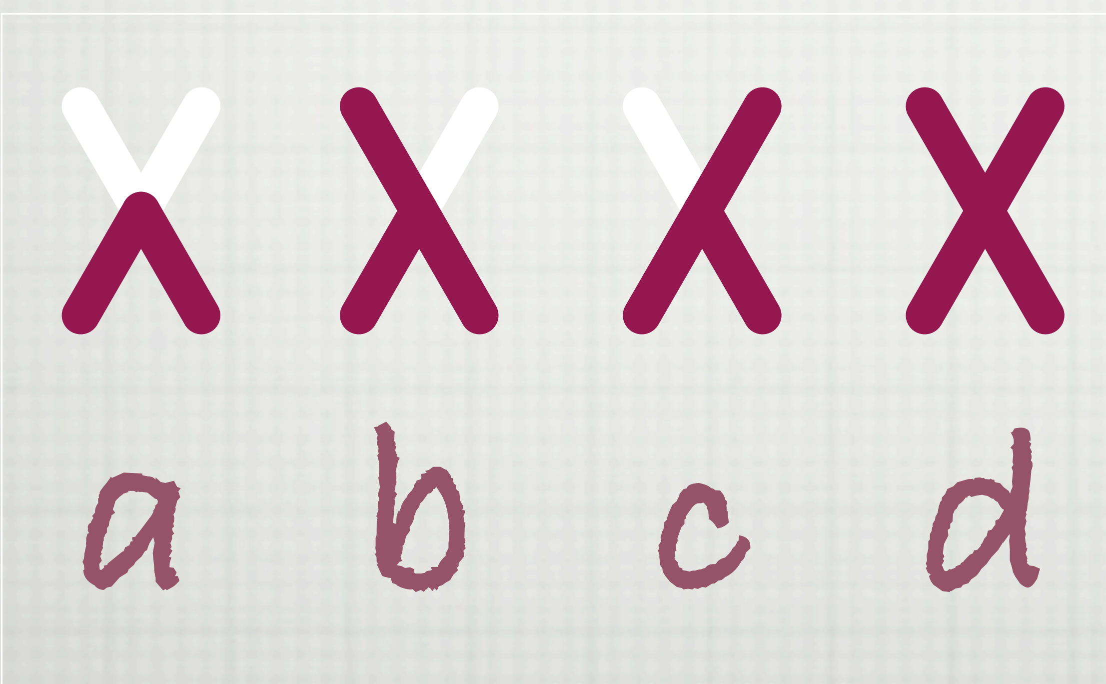
- Nous passerons en revue les cas
  - (0,0,0,1),
  - (0,0.5,0.5,0),

ANNIHILATION BALLISTIQUE BRANCHANTE

- Introduite par Cardy & Täuber (2008) ?

- Variante (1,0,0,0) de leur modèle plus général (a,b,c,d), a+b+c+d=1, où on envisage 4 types de comportement lors d'une collision :





- Nous passerons en revue les cas
  - (0,0,0,1),
  - (0,0.5,0.5,0),
  - (1,0,0,0).

BRANCHEMENT PUR (0,0,0,1)

Supposons qu'initialement il y ait une particule positive en 0, et posons :

$$\mu_t f = \mathbb{E}\left[\sum_{\xi \in X_t} f(\xi)\right] = f(t) + \int_{x=-t}^{t} \psi(t,x) f(x) dx$$

BRANCHEMENT PUR (0,0,0,1)

Supposons qu'initialement il y ait une particule positive en 0, et posons :

$$\mu_t f = \mathbb{E}\left[\sum_{\xi \in X_t} f(\xi)\right] = f(t) + \int_{x=-t}^{t} \psi(t,x) f(x) dx$$

Théorème (M. Krikun).

BRANCHEMENT PUR (0,0,0,1)

Supposons qu'initialement il y ait une particule positive en 0, et posons :

$$\mu_t f = \mathbb{E}\left[\sum_{\xi \in X_t} f(\xi)\right] = f(t) + \int_{x=-t}^{t} \psi(t,x) f(x) dx$$

Théorème (M. Krikun).

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t, z\sqrt{t})\, e^{-t}\, \sqrt{t} = \frac{e^{-\frac{1}{2}\, z^2}}{\sqrt{2\pi}}$$

BRANCHEMENT PUR (0,0,0,1)

Supposons qu'initialement il y ait une particule positive en 0, et posons :

$$\mu_t f = \mathbb{E}\left[\sum_{\xi \in X_t} f(\xi)\right] = f(t) + \int_{x=-t}^{t} \psi(t,x) f(x) dx$$

Théorème (M. Krikun).

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t, z\sqrt{t})\, e^{-t}\, \sqrt{t} = \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}}$$

- La masse totale est e^t.

BRANCHEMENT PUR (0,0,0,1)

Supposons qu'initialement il y ait une particule positive en 0, et posons :

$$\mu_t f = \mathbb{E}\left[\sum_{\xi \in X_t} f(\xi)\right] = f(t) + \int_{x=-t}^{t} \psi(t,x) f(x)\,dx$$

Théorème (M. Krikun).

$$\lim_{t\to\infty} \psi(t, z\sqrt{t})\, e^{-t}\, \sqrt{t} = \frac{e^{-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{2\pi}}$$

- La masse totale est e^t.
- Elle est concentrée dans un intervalle de largeur $O(\sqrt{t})$ autour de l'origine.

CONSTRUCTION DU PROCESSUS

Théorème . Pour chaque fonction f 1-Lipshitz et pour chaque configuration de points localement finie sur

$$\partial f := \{(x,t) : t = f(x)\},$$

le processus dans le demi-plan

$$f_+ := \{(x,t) : t > f(x)\},$$

est bien défini.

CONSTRUCTION DU PROCESSUS

Théorème . Pour chaque fonction f 1-Lipshitz et pour chaque configuration de points localement finie sur

$$\partial f := \{(x,t) : t = f(x)\},$$

le processus dans le demi-plan

$$f_+ := \{(x,t) : t > f(x)\},$$

est bien défini.

Idée :

CONSTRUCTION DU PROCESSUS

Théorème . Pour chaque fonction f 1-Lipshitz et pour chaque configuration de points localement finie sur

$$\partial f := \{(x,t) : t = f(x)\},$$

le processus dans le demi-plan

$$f_+ := \{(x,t) : t > f(x)\},$$

est bien défini.

Idée :

- partir d'un processus de branchement pur -> arbres infinis

CONSTRUCTION DU PROCESSUS

Théorème . Pour chaque fonction f 1-Lipshitz et pour chaque configuration de points localement finie sur

$$\partial f := \{(x,t) : t = f(x)\},$$

le processus dans le demi-plan

$$f_+ := \{(x,t) : t > f(x)\},$$

est bien défini.

Idée :

- partir d'un processus de branchement pur -> arbres infinis

- couper les branches qu'il faut

CONSTRUCTION DU PROCESSUS

Théorème . Pour chaque fonction f 1-Lipshitz et pour chaque configuration de points localement finie sur

$$\partial f := \{(x,t) : t = f(x)\},$$

le processus dans le demi-plan

$$f_+ := \{(x,t) : t > f(x)\},$$

est bien défini.

Idée :

- partir d'un processus de branchement pur -> arbres infinis

- couper les branches qu'il faut

- la seule difficulté survient quand $f(x)$ a une pente ± 1 sur un intervalle infini : le passé d'un point du demi-plan peut contenir une infinité de points de branchement.

PROPRIÉTÉ DE MARKOV

Propriété. Considérons le processus construit à partir d'une configuration sur une frontière ∂g. Alors, pour une frontière ∂f (t.q. $g<f$), les parties du processus en dessous et au dessus de ∂f sont independantes, conditionellement au processus sur ∂f.

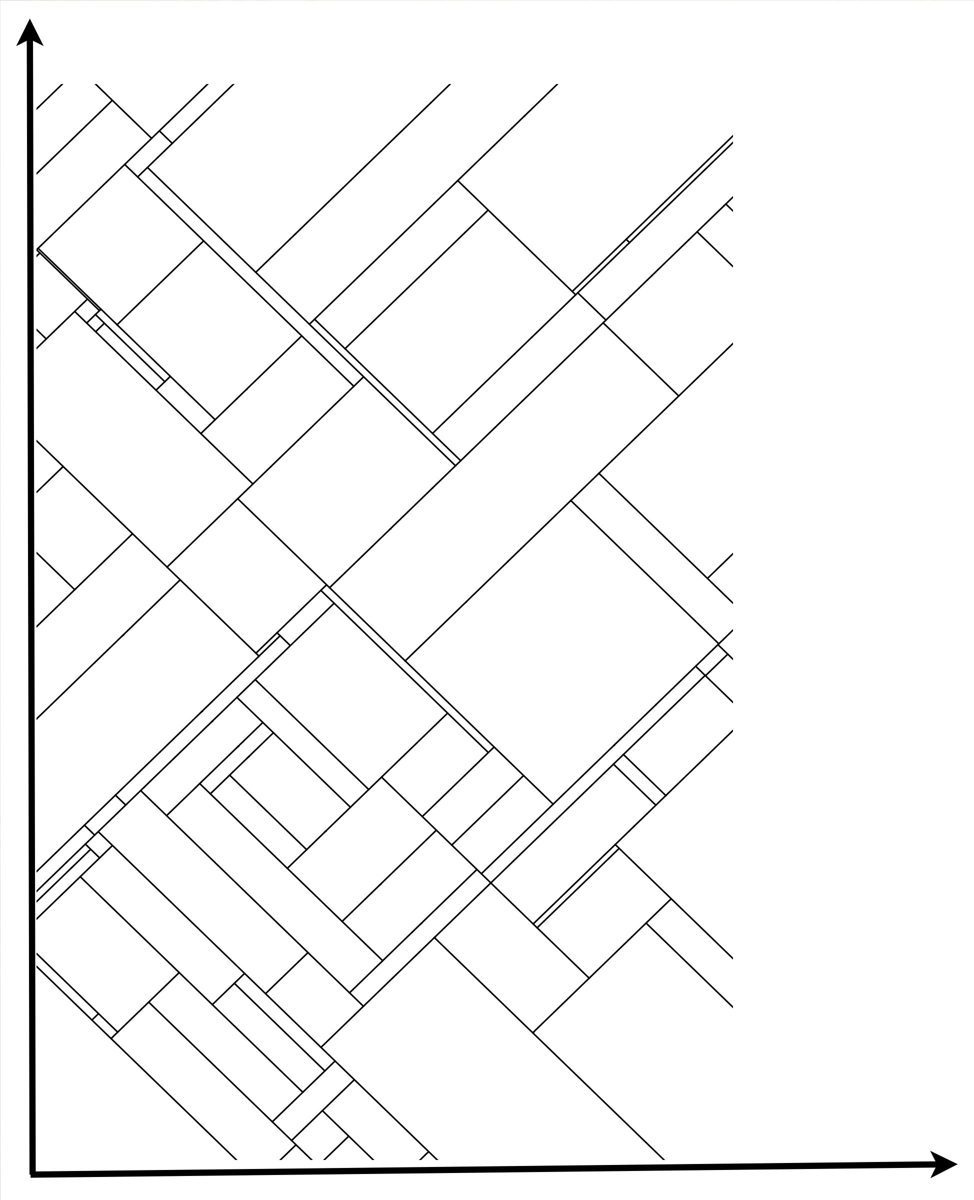
PROPRIÉTÉ DE MARKOV

Propriété. Considérons le processus construit à partir d'une configuration sur une frontière ∂g. Alors, pour une frontière ∂f (t.q. $g<f$), les parties du processus en dessous et au dessus de ∂f sont independantes, conditionellement au processus sur ∂f.

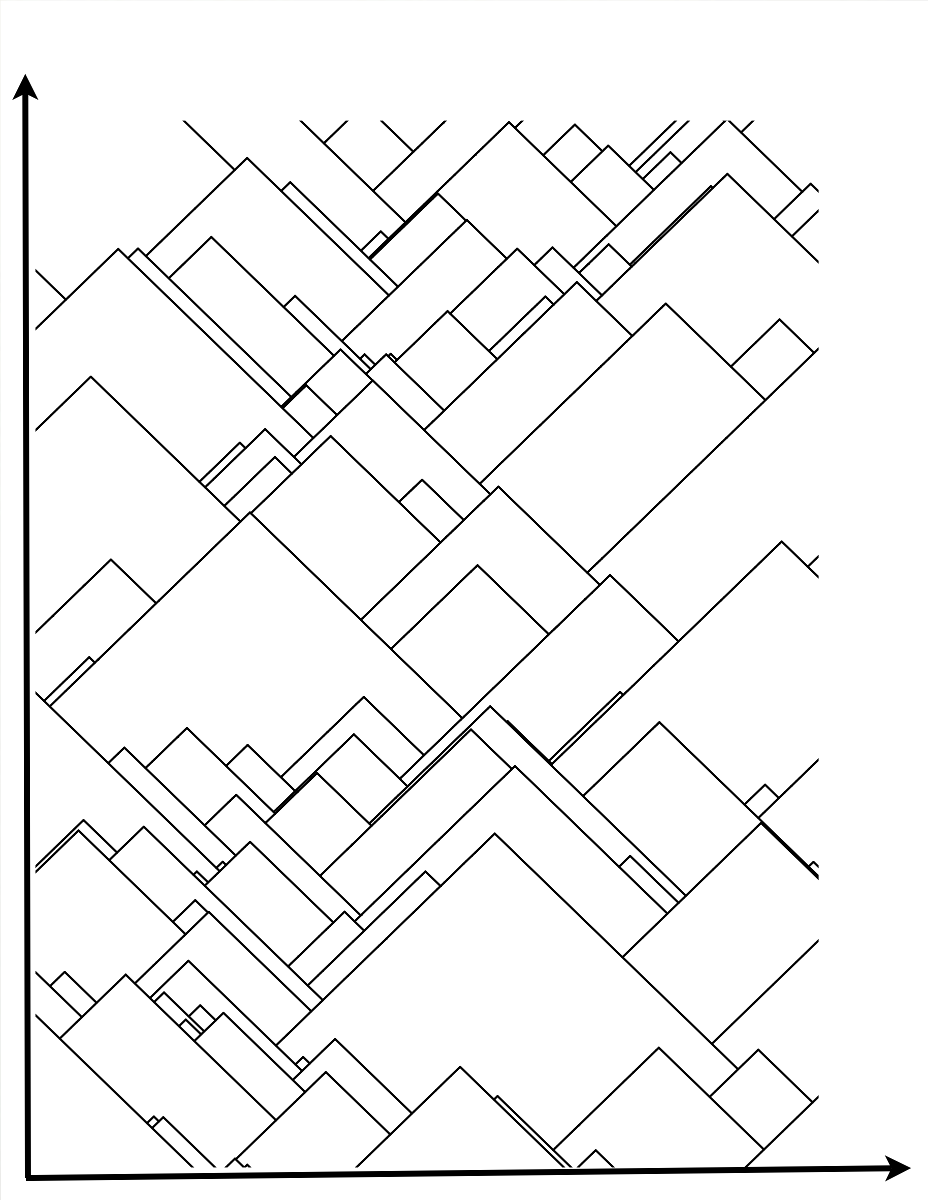
- **Conjecture :** vrai pour l'intérieur et l'extérieur d'une courbe de Jordan, conditionellement au processus sur la courbe.

SIMULATIONS

(0,0.5,0.5,0)



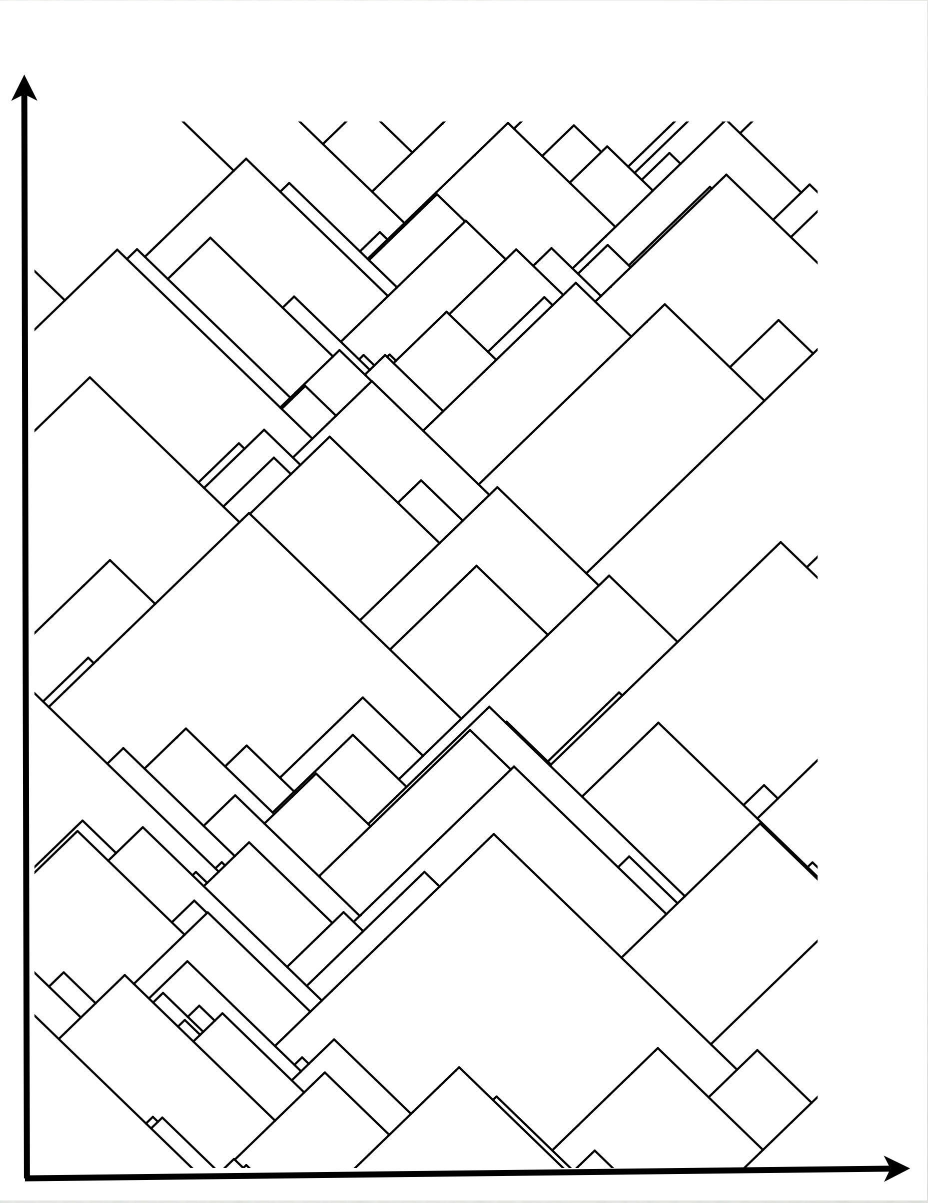
(1,0,0,0)



LE PROCESSUS PENCHÉ

Annihilation ballistique branchante
(1,0,0,0)

Commencer d'une frontière $x+t=a\sqrt{2}$, avec une population X_a localement finie de particules positives.

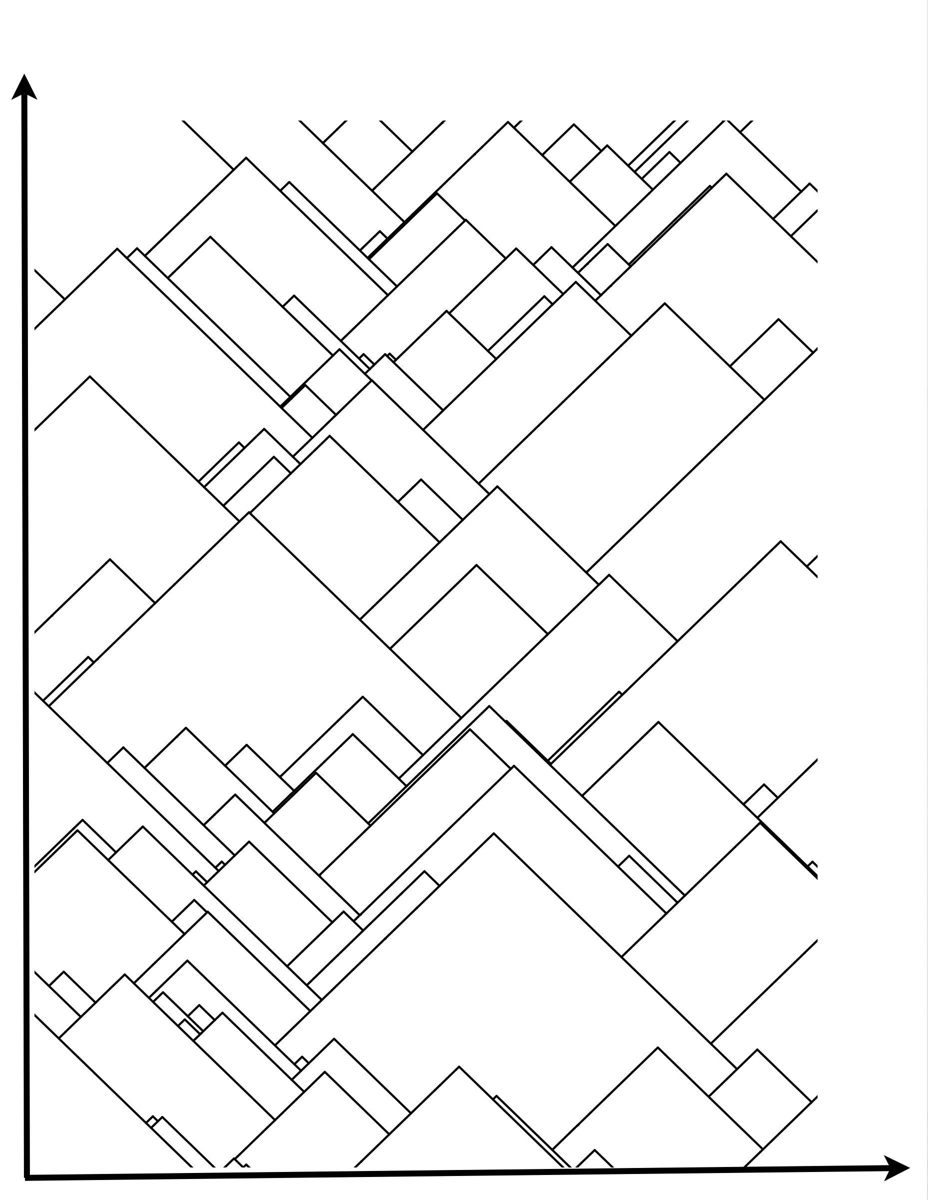


LE PROCESSUS PENCHÉ

Annihilation ballistique branchante
(1,0,0,0)

Commencer d'une frontière $x+t=a\sqrt{2}$, avec une population X_a localement finie de particules positives.

Evolution



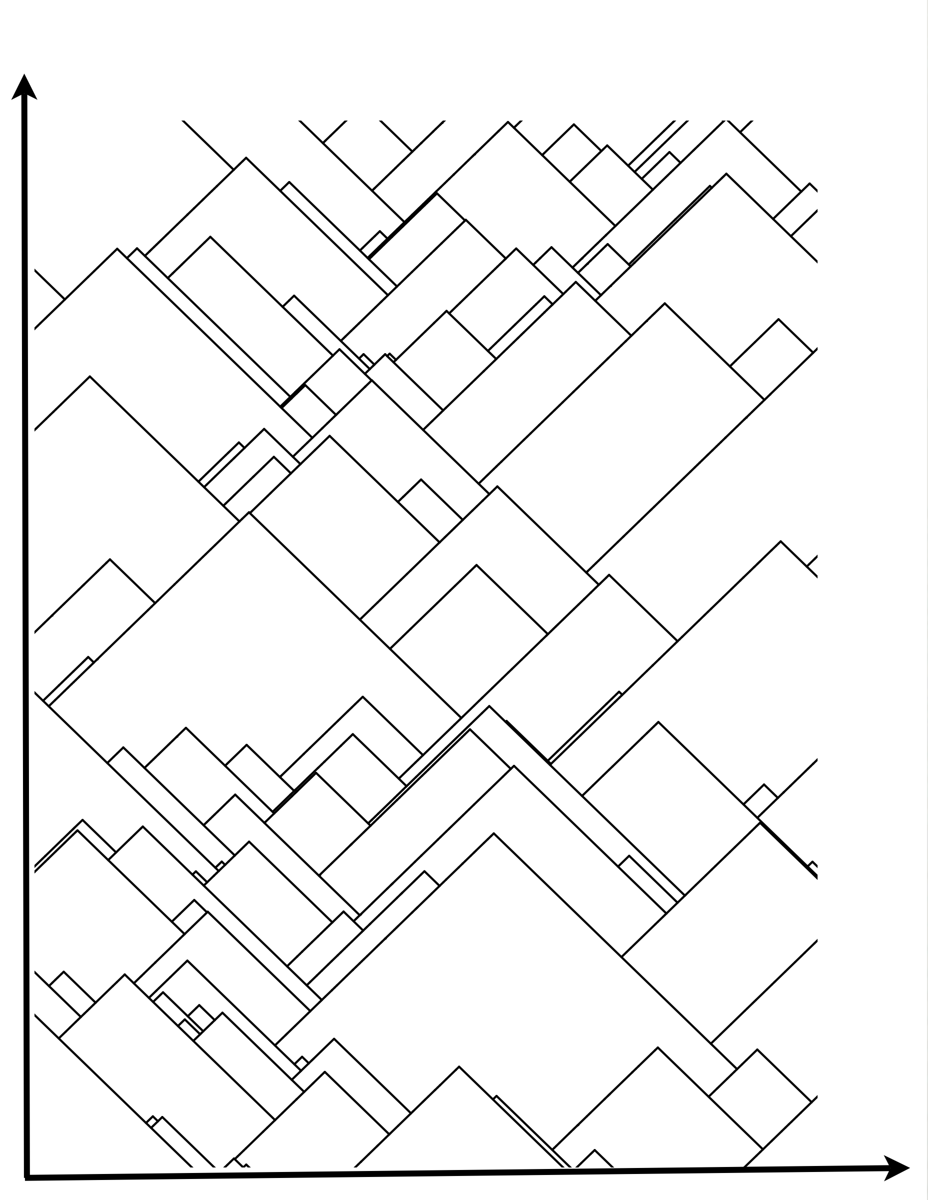
LE PROCESSUS PENCHÉ

Annihilation ballistique branchante
(1,0,0,0)

Commencer d'une frontière $x+t=a\sqrt{2}$, avec une population X_a localement finie de particules positives.

Evolution

- Chaque particule, avec taux $1/\sqrt{2}$, tire et tue son voisin de gauche ;



LE PROCESSUS PENCHÉ

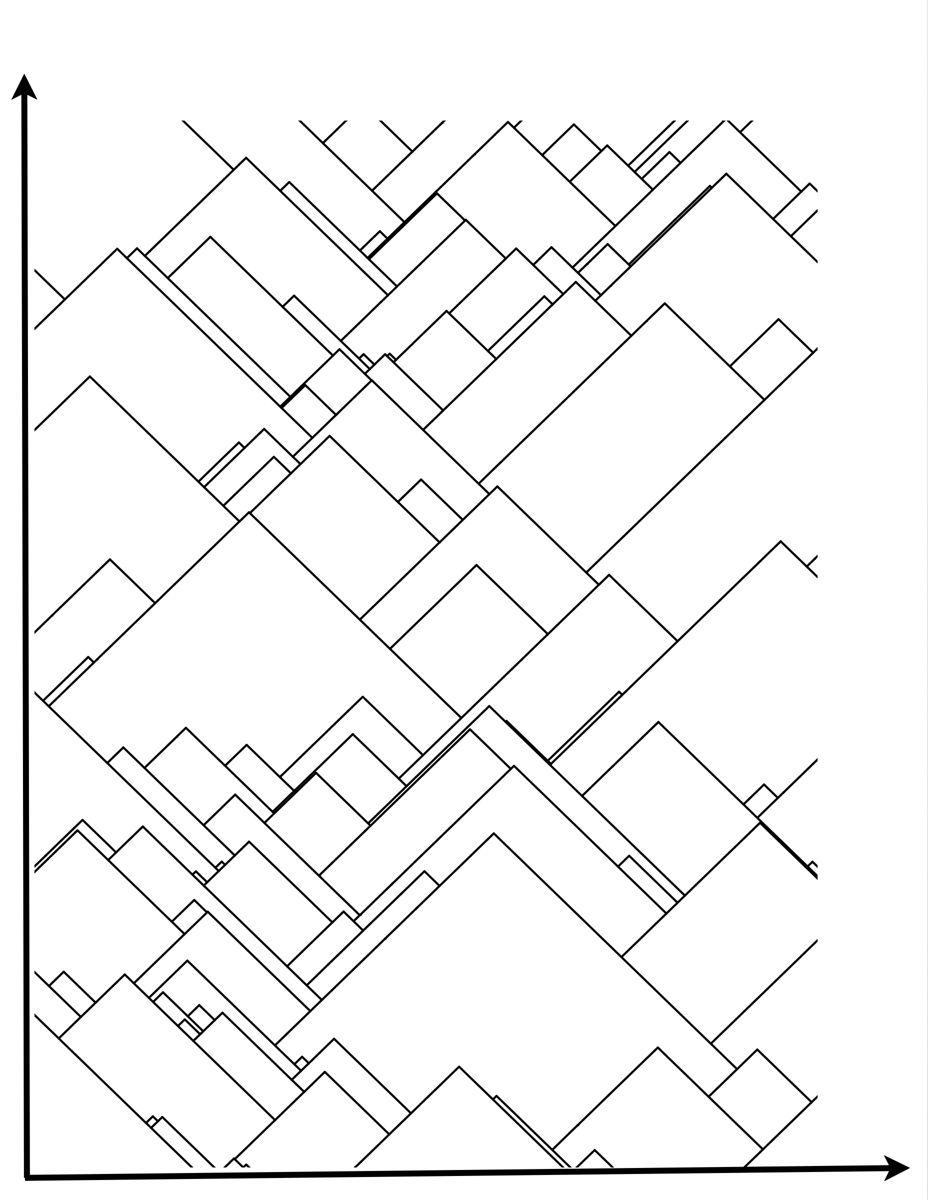
Annihilation ballistique branchante
(1,0,0,0)

Commencer d'une frontière $x+t=a\sqrt{2}$, avec une population X_a localement finie de particules positives.

Evolution

- Chaque particule, avec taux $1/\sqrt{2}$, tire et tue son voisin de gauche ;

- l'intervalle entre les deux particules est rempli par une copie indépendante d'un PPP($1/\sqrt{2}$).



MESURE STATIONAIRE : APPROCHE ANALYTIQUE

Processus de Markov à valeurs mesure :

Soit X_s l'ensemble des positions des particules positives sur l'axe $\{x+t=s\sqrt{2}\}$. On suppose l'état initial $X_0=x$ infini dans les 2 directions et localement fini. Alors, pour φ continue à support compact et positive,

$$G\left(e^{-\langle\varphi,\cdot\rangle}\right)(x) \; := \; \lim_{s\downarrow 0} \; s^{-1}\left(\mathbb{E}\left[e^{-\langle\varphi,X_s\rangle}\right]-e^{-\langle\varphi,x\rangle}\right)$$

est bien défini.

Si de plus, une variable aléatoire X à valeur mesure ponctuelle (infinie dans les 2 directions et localement finie), satisfait, pour toute φ continue à support compact et positive,

$$\mathbb{E}\left[G\left(e^{-\langle\varphi,\cdot\rangle}\right)(X)\right]=0,$$

alors la loi de X est stationnaire.

MESURE STATIONAIRE DES PROCESSUS PENCHÉS

✳ **Théorème**

- pour la version (1,0,0,0), PPP($1/\sqrt{2}$) est l'unique mesure stationaire qui soit portée par les mesures ponctuelles (infinies dans les 2 directions et localement finies) ;

MESURE STATIONAIRE DES PROCESSUS PENCHÉS

- **Théorème**

  - pour la version $(1,0,0,0)$, PPP($1/\sqrt{2}$) est l'unique mesure stationaire qui soit portée par les mesures ponctuelles (infinies dans les 2 directions et localement finies) ;

  - pour la version $(0,0.5,0.5,0)$, PPP($\sqrt{2}$) est l'unique mesure stationaire qui soit portée par les mesures ponctuelles (infinies dans les 2 directions et localement finies).

MESURE STATIONAIRE DES PROCESSUS PENCHÉS

✳ **Théorème**

- ☐ pour la version (1,0,0,0), PPP($1/\sqrt{2}$) est l'unique mesure stationaire qui soit portée par les mesures ponctuelles (infinies dans les 2 directions et localement finies) ;

- ☐ pour la version (0,0.5,0.5,0), PPP($\sqrt{2}$) est l'unique mesure stationaire qui soit portée par les mesures ponctuelles (infinies dans les 2 directions et localement finies).

✳ **Conséquence :** *on peut définir un processus stationnaire sur le plan entier.*

CAS (0,0.5,0.5,0) : GROUPE DES SYMÉTRIES

Théorème.

- Le groupe d'invariance de la tessellation contient le groupe diédral du carré et toutes les translations.

CAS (0,0.5,0.5,0) : GROUPE DES SYMÉTRIES

Théorème.

- Le groupe d'invariance de la tessellation contient le groupe diédral du carré et toutes les translations.
- En particulier, les processus penchés d'un angle quelconque sont Markov, stationnaires et réversibles.

CAS (0,0.5,0.5,0) : GROUPE DES SYMÉTRIES

Théorème.

- Le groupe d'invariance de la tessellation contient le groupe diédral du carré et toutes les translations.
- En particulier, les processus penchés d'un angle quelconque sont Markov, stationnaires et réversibles.

Preuve. Le générateur du processus penché est donné par

$$Ge^{\langle \phi,.\rangle}(\pi) = e^{\langle \phi,\pi\rangle} \sum_{\{y,x\}\subset\pi,\, y<x} 2^{-\#[y,x)\cap\pi} \left(e^{-\langle \phi \mathbf{1}_{(y,x)},\pi\rangle + \mu \int_y^x (e^{\phi(u)}-1)du} - 1 \right).$$

CAS (0,0.5,0.5,0) : GROUPE DES SYMÉTRIES

Théorème.

- Le groupe d'invariance de la tessellation contient le groupe diédral du carré et toutes les translations.
- En particulier, les processus penchés d'un angle quelconque sont Markov, stationnaires et réversibles.

Preuve. Le générateur du processus penché est donné par

$$Ge^{\langle \phi,.\rangle}(\pi) = e^{\langle \phi,\pi\rangle} \sum_{\{y,x\}\subset\pi,\, y<x} 2^{-\#[y,x)\cap\pi} \left(e^{-\langle \phi \mathbf{1}_{(y,x)},\pi\rangle + \mu \int_y^x (e^{\phi(u)}-1)du} - 1\right).$$

On constate que pour toute symétrie T de la droite réelle ($T(x)=a-x$) :

$$Ge^{\langle \phi\circ T,.\rangle}(\pi) = Ge^{\langle \phi,.\rangle}\circ T(\pi).$$

CAS (0,0.5,0.5,0) : LOI STATIONNAIRE

Théorème.

- La loi stationnaire du processus horizontal est celle d'un couple de PPP(1) indépendants.

CAS (0,0.5,0.5,0) : LOI STATIONNAIRE

Théorème.

- La loi stationnaire du processus horizontal est celle d'un couple de PPP(1) indépendants.

- La loi stationnaire du processus penché d'angle a est celle d'un couple de PPP() indépendants de paramètres respectifs :

CAS (0,0.5,0.5,0) : LOI STATIONNAIRE

Théorème.

- La loi stationnaire du processus horizontal est celle d'un couple de PPP(1) indépendants.
- La loi stationnaire du processus penché d'angle a est celle d'un couple de PPP() indépendants de paramètres respectifs :
  - $|\cos a+\sin a|$ et $|\cos a-\sin a|$.

CAS (1,0,0,0) : LOI STATIONNAIRE

- **Théorème.**

- La loi stationnaire du processus horizontal des particules positives (resp. négatives) est un PPP (1/2).

CAS (1,0,0,0) : LOI STATIONNAIRE

✳ **Théorème.**

- La loi stationnaire du processus horizontal des particules positives (resp. négatives) est un PPP (1/2).
- Mais les deux PPP ne sont pas indépendants.

CAS (1,0,0,0) : LOI STATIONNAIRE

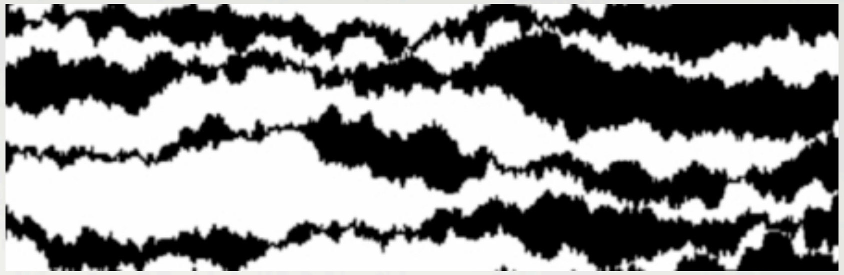
- **Théorème.**

  - ☐ La loi stationnaire du processus horizontal des particules positives (resp. négatives) est un PPP (1/2).

  - ☐ Mais les deux PPP ne sont pas indépendants.

- **Problème ouvert :** décrire la loi stationnaire.

RELATED RESULTS



- R. A. Blythe, M. R. Evans & Y. Kafri, Stochastic Ballistic Annihilation and Coalescence, Phys. Rev. Lett. 85, 3750 - 3753, 2000.
- V. Belitsky & P. A. Ferrari, Invariant Measures and Convergence Properties for Cellular Automaton 184 and Related Processes, Journal of Statistical Physics, Vol. 118, Nos. 3/4, February 2005.
- J. Cardy & U. C. Täuber, Theory of Branching and Annihilating Random Walks, arXiv 2008.
- N. Fates & L. Gerin, Examples of Fast and Slow Convergence of 2D Asynchronous Cellular Systems, Proceedings of ACRI'08, 184-191, 2008.
- P. Chassaing & L. Gerin, Asynchronous Cellular Automata and Brownian Motion, DMTCS Proceedings of 2007 International Conference on Analysis of Algorithms, 385-402, 2007.
- P. Dai Pra, P.-Y. Louis & S. Roelly, Stationary measures and phase transition for a class of Probabilistic Cellular Automata, ESAIM: P&S, Vol. 6, 89-104, May 2002.