Théorèmes limites pour des processus de branchement en environnement aléatoire sous-critiques

Vincent Bansaye

LPMA. Université Paris 6.

Mardi 2 septembre 2008. Journées de Probabilités.

Rappel : processus de Galton Watson

A chaque génération, chaque fleur donne naissance indépendamment à un nombre aléatoire de fleurs, qui suit la même distribution

$$Z, \qquad m := \mathbb{E}(Z).$$

Dans le cas sous-critique :

$$m < 1,$$

la population s´éteint p.s. et

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim cm^n \qquad (n \to \infty).$$

Exemple de PBEA

Population de
fleurs fragiles

en environnement aleatoire :

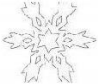
Exemple de PBEA

Population de
fleurs fragiles

en environnement aleatoire :

Soleil et pluie avec proba 3/7
Forte reproduction

Nuageux avec proba 3/7
Faible reproduction

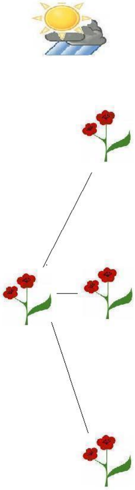


Neige, gel avec proba 1/7
Mort avec forte proba

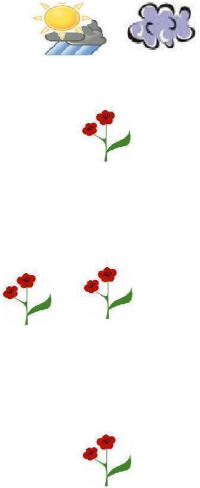
Exemple de PBEA

Exemple de PBEA

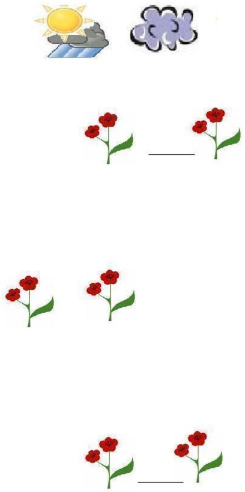
Exemple de PBEA



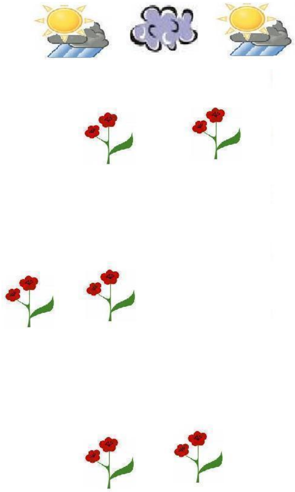
Exemple de PBEA



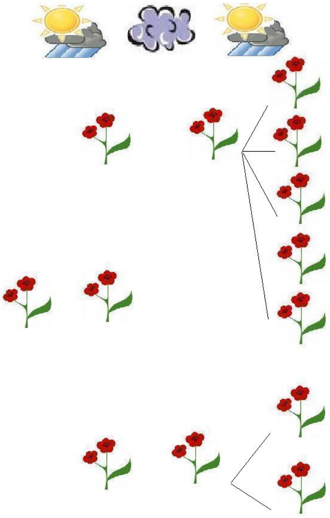
Exemple de PBEA



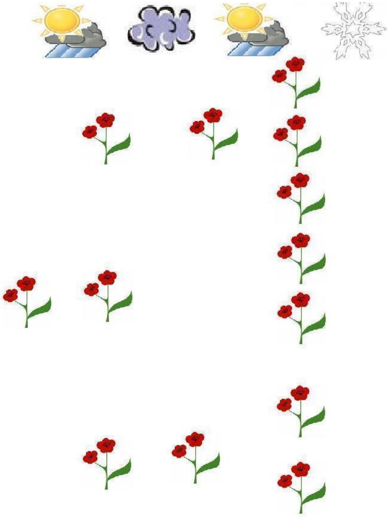
Exemple de PBEA



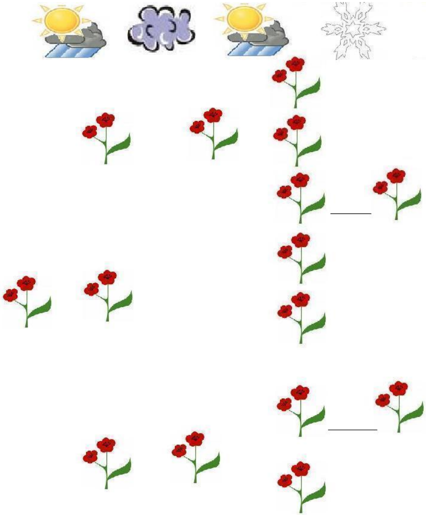
Exemple de PBEA



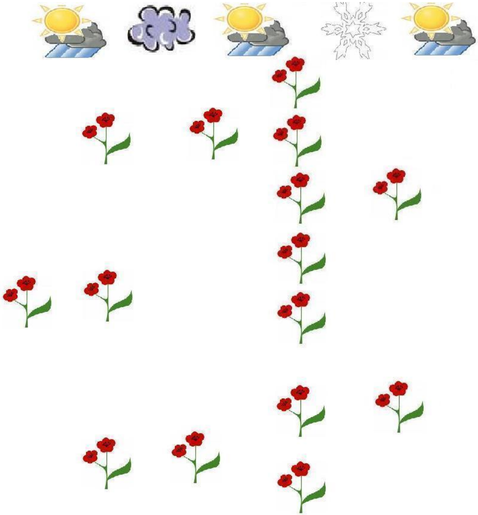
Exemple de PBEA



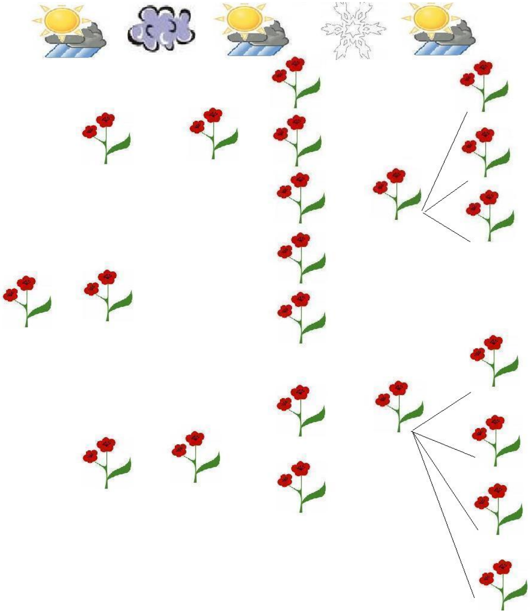
Exemple de PBEA



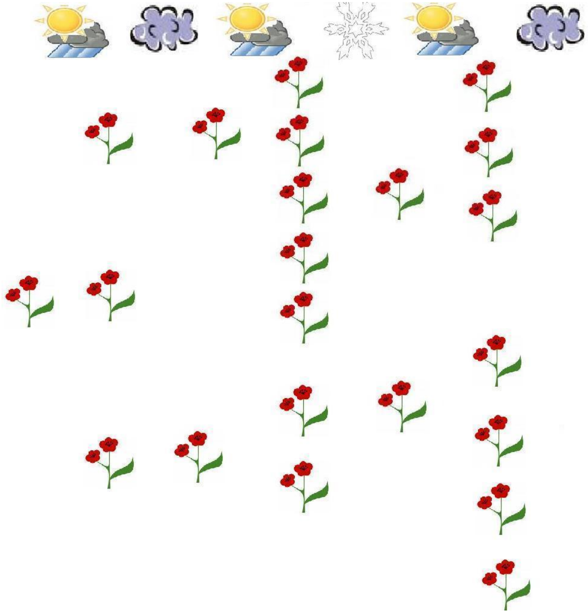
Exemple de PBEA



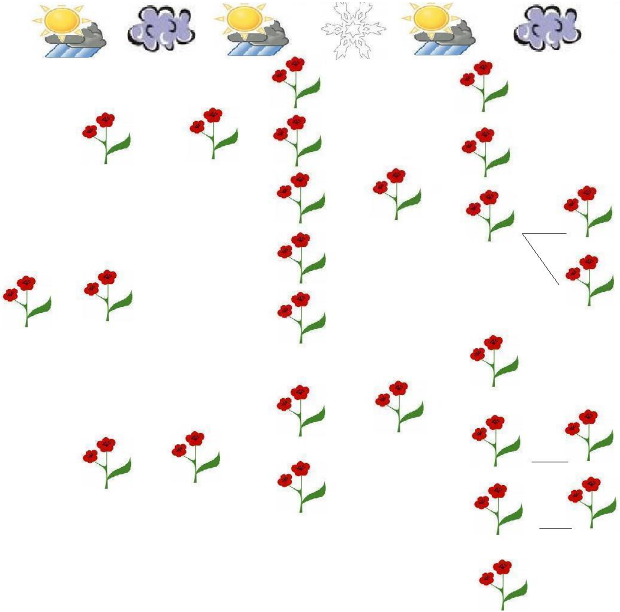
Exemple de PBEA



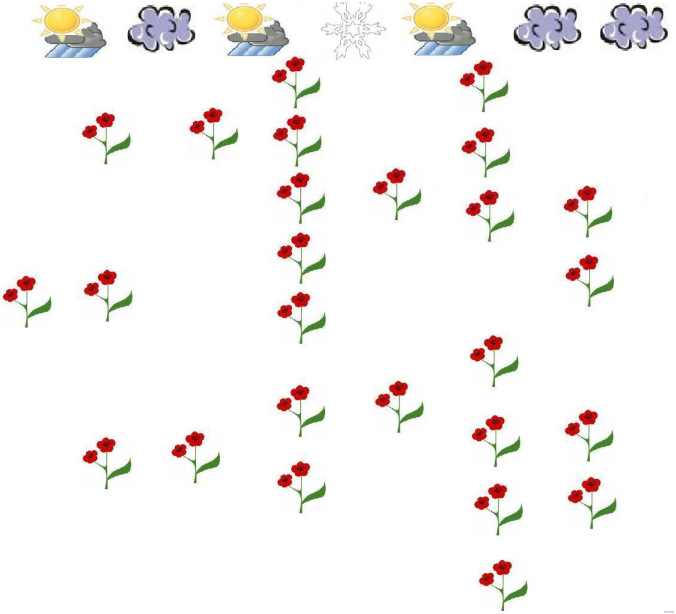
Exemple de PBEA



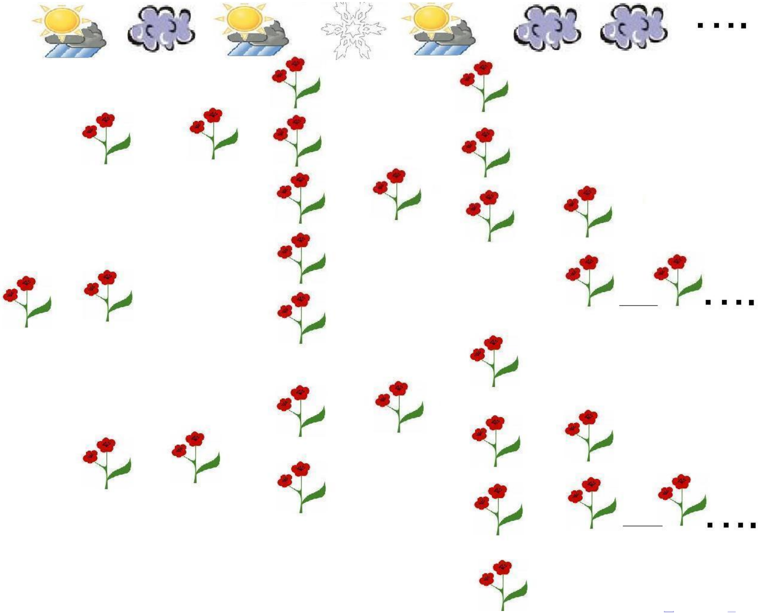
Exemple de PBEA



Exemple de PBEA



Exemple de PBEA



Description d'un PBEA $(Z_n)_{n\geq 0}$

$$\mathcal{E}_i = \text{environnement à la génération } i$$

$(\mathcal{E}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ forme une suite iid. On introduit la loi de reproduction des fleurs sous l'environnement e

$$Z(e), \qquad m(e) := \mathbb{E}(Z(e)).$$

Description d'un PBEA $(Z_n)_{n\geq 0}$

$$\mathcal{E}_i = \text{environnement à la génération } i$$

$(\mathcal{E}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ forme une suite iid. On introduit la loi de reproduction des fleurs sous l'environnement e

$$Z(e), \qquad m(e) := \mathbb{E}(Z(e)).$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, conditionnellement à

$$\mathcal{E}_{n+1} = e,$$

on a

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} X_i,$$

avec $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ suite iid de variables aléatoires distribuées comme $Z(e)$.

PBEA sous-critique

Un PBEA est sous-critique quand

$$\mathbb{E}(\log(m(\mathcal{E}))) < 0.$$

La population s'éteint alors p.s. On distingue :

PBEA sous-critique

Un PBEA est sous-critique quand

$$\mathbb{E}(\log(m(\mathcal{E}))) < 0.$$

La population s'éteint alors p.s. On distingue :

- Cas fortement sous critique : $\mathbb{E}(m(\mathcal{E})\log(m(\mathcal{E}))) < 0$, alors :

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c\mathbb{E}(m(\mathcal{E}))^n, \quad (n \to \infty).$$

- Cas moyennement sous critique : $\mathbb{E}(m(\mathcal{E})\log(m(\mathcal{E}))) = 0$, alors :

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c'\mathbb{E}(m(\mathcal{E}))^n/n^{1/2}, \quad (n \to \infty).$$

- Cas faiblement sous critique : $\mathbb{E}(m(\mathcal{E})\log(m(\mathcal{E}))) > 0$, alors :

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c''\gamma^n/n^{3/2}, \quad (n \to \infty).$$

Dépendance de la population initiale

Question : comment les théorèmes limites dépendent de la population initiale ?

Question : comment les théorèmes limites dépendent de la population initiale ?

Problème : les fleurs ne se comportent pas indépendamment, sauf pour processus de GW.

Dépendance de la population initiale

Question : comment les théorèmes limites dépendent de la population initiale ?

Problème : les fleurs ne se comportent pas indépendamment, sauf pour processus de GW.

Motivation : 1) Prolifération de parasites dans une cellule en division.

Question : comment les théorèmes limites dépendent de la population initiale ?

Problème : les fleurs ne se comportent pas indépendamment, sauf pour processus de GW.

Motivation : 1) Prolifération de parasites dans une cellule en division.
2) Multplier la population initiale par k modifie la probabilité de survie de combien ? Combien faut il planter de fleurs pour en obtenir au moins une au bout d'un nombre N (grand) de générations ?

Probabilité de survie partant de k fleurs initiales

Pour tout $k \geq 1$, $\qquad \mathbb{P}_k(Z_n > 0) \sim \alpha_k \mathbb{P}_1(Z_n > 0) \quad (n \to \infty).$

Probabilité de survie partant de k fleurs initiales

$$\text{Pour tout } k \geq 1, \qquad \mathbb{P}_k(Z_n > 0) \sim \alpha_k \mathbb{P}_1(Z_n > 0) \quad (n \to \infty).$$

- En environnement fortement ou moyennement sous-critique ($\mathbb{E}(m(\mathcal{E}) \log(m(\mathcal{E}))) \leq 0$), planter k fois plus de fleurs initialement multiplie par k la probabilité que la population survive en temps long :

$$\alpha_k = k.$$

Probabilité de survie partant de k fleurs initiales

$$\text{Pour tout } k \geq 1, \qquad \mathbb{P}_k(Z_n > 0) \sim \alpha_k \mathbb{P}_1(Z_n > 0) \quad (n \to \infty).$$

- En environnement fortement ou moyennement sous-critique ($\mathbb{E}(m(\mathcal{E}) \log(m(\mathcal{E}))) \leq 0$), planter k fois plus de fleurs initialement multiplie par k la probabilité que la population survive en temps long :

$$\alpha_k = k.$$

- En environnement faiblement sous-critique ($\mathbb{E}(m(\mathcal{E}) \log(m(\mathcal{E}))) > 0$),

$$C_1 \log(k) k^\alpha \leq \alpha_k \leq C_2 \log(k) k^\alpha \qquad (k \geq 1),$$

avec $\alpha \in (0,1)$ donné par $\mathbb{E}(m(\mathcal{E})^\alpha \log(m(\mathcal{E}))) = 0$.

Idées de la preuve

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \leq \mathbb{E}_1(Z_n \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) = \Pi_{i=1}^{n} m(\mathcal{E}_i) \quad \text{a.s.}$$

Idées de la preuve

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \leq \mathbb{E}_1(Z_n \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) = \Pi_{i=1}^n m(\mathcal{E}_i) \quad \text{a.s.}$$

c.a.d

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \leq \exp(S_n), \quad S_n = \sum_{i=1}^n \log(m(\mathcal{E}_i)).$$

Idées de la preuve

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \leq \mathbb{E}_1(Z_n \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) = \Pi_{i=1}^n m(\mathcal{E}_i) \quad \text{a.s.}$$

c.a.d

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \leq \exp(S_n), \quad S_n = \sum_{i=1}^n \log(m(\mathcal{E}_i)).$$

Comme $\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \downarrow$ quand $n \uparrow$,

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \leq \exp(L_n), \quad L_n = \min(S_i : 1 \leq i \leq n).$$

Idées de la preuve

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \leq \mathbb{E}_1(Z_n \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) = \Pi_{i=1}^n m(\mathcal{E}_i) \quad \text{a.s.}$$

c.a.d

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \leq \exp(S_n), \quad S_n = \sum_{i=1}^n \log(m(\mathcal{E}_i)).$$

Comme $\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \downarrow$ quand $n \uparrow$,

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \leq \exp(L_n), \quad L_n = \min(S_i : 1 \leq i \leq n).$$

En utilisant les distributions linéaires fractionaires et un lemme sur les marches aléatoires avec drift négatif conditionées à $\geq x$

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n)`\geq`\exp(L_n), \quad L_n = \min(S_i : 1 \leq i \leq n).$$

Donc

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_n) \sim \exp(L_n), \quad L_n = \min(S_i : 1 \leq i \leq n).$$

Donc

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \sim \exp(L_n), \quad L_n = \min(S_i : 1 \leq i \leq n).$$

Or, conditionnellement aux environnements, les fleurs se reproduisent indépendamment :

$$\mathbb{P}_k(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) = 1 - (1 - \mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n))^k.$$

Idées de la preuve

Donc

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \sim \exp(L_n), \quad L_n = \min(S_i : 1 \leq i \leq n).$$

Or, conditionnellement aux environnements, les fleurs se reproduisent indépendamment :

$$\mathbb{P}_k(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) = 1 - (1 - \mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n))^k.$$

Donc, en intégrant sur les environnements,

$$\mathbb{P}_k(Z_n > 0) \sim \mathbb{E}\big(1 - (1 - \exp(L_n))^k\big) \qquad (n \to \infty).$$

Donc

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \sim \exp(L_n), \quad L_n = \min(S_i : 1 \leq i \leq n).$$

Or, conditionnellement aux environnements, les fleurs se reproduisent indépendamment :

$$\mathbb{P}_k(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) = 1 - (1 - \mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n))^k.$$

Donc, en intégrant sur les environnements,

$$\mathbb{P}_k(Z_n > 0) \sim \mathbb{E}\big(1 - (1 - \exp(L_n))^k\big) \qquad (n \to \infty).$$

Dans le cas fortement sous-critique,

$$\mathbb{P}_k(Z_n > 0) \sim \mathbb{E}\big(k \exp(L_n)\big) \sim k\mathbb{P}_1(Z_n > 0) \qquad (n \to \infty).$$

Donc

$$\mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \sim \exp(L_n), \quad L_n = \min(S_i : 1 \leq i \leq n).$$

Or, conditionnellement aux environnements, les fleurs se reproduisent indépendamment :

$$\mathbb{P}_k(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) = 1 - (1 - \mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n))^k.$$

Donc, en intégrant sur les environnements,

$$\mathbb{P}_k(Z_n > 0) \sim \mathbb{E}\big(1 - (1 - \exp(L_n))^k\big) \qquad (n \to \infty).$$

Dans le cas fortement sous-critique,

$$\mathbb{P}_k(Z_n > 0) \sim \mathbb{E}\big(k \exp(L_n)\big) \sim k\mathbb{P}_1(Z_n > 0) \qquad (n \to \infty).$$

Dans le cas faiblement sous-critique, $\mathbb{P}(\exp(L_n) \in \mathrm{d}x) \sim f(n)\mu(dx)$, donc

$$\mathbb{P}_k(Z_n > 0) \sim f(n) \int_0^1 (1 - (1 - x)^k)\mu(\mathrm{d}x) \qquad (n \to \infty).$$

Conditionnellement à la survie des fleurs...

Sachant qu'il y a au moins une fleur à la génération n, y a-t-il plusieurs fleurs plantées initialement dont la descendance a survécu jusque à la génération n quand $n \to \infty$?

Conditionnellement à la survie des fleurs...

Sachant qu'il y a au moins une fleur à la génération n, y a-t-il plusieurs fleurs plantées initialement dont la descendance a survécu jusque à la génération n quand $n \to \infty$?

On note $i = 1..k$ les fleurs de la génération 0, et $Z_n^{(i)}$ le nombre de descendants de la fleur i à la génération n.

Sachant qu'il y a au moins une fleur à la génération n, y a-t-il plusieurs fleurs plantées initialement dont la descendance a survécu jusque à la génération n quand $n \to \infty$?

On note $i = 1..k$ les fleurs de la génération 0, et $Z_n^{(i)}$ le nombre de descendants de la fleur i à la génération n.

- En environnement fortement ou moyennement sous-critique,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_k(\exists i \neq j,\ 1 \leq i, j \leq k,\ Z_n^{(i)} > 0,\ Z_n^{(j)} > 0 \,|Z_n > 0) = 0.$$

Sachant qu'il y a au moins une fleur à la génération n, y a-t-il plusieurs fleurs plantées initialement dont la descendance a survécu jusque à la génération n quand $n \to \infty$?

On note $i = 1..k$ les fleurs de la génération 0, et $Z_n^{(i)}$ le nombre de descendants de la fleur i à la génération n.

- En environnement fortement ou moyennement sous-critique,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_k(\exists i \neq j,\ 1 \leq i, j \leq k,\ Z_n^{(i)} > 0,\ Z_n^{(j)} > 0 \,|Z_n > 0) = 0.$$

- En environnement faiblement sous-critique,

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_k(\forall i,\ 1 \leq i \leq k,\ Z_n^{(i)} > 0 \,|Z_n > 0) > 0.$$

Conditionnellement à la survie des fleurs...

Sachant qu'il y a au moins une fleur à la génération n, dois-t-on l'attribuer au fait que les fleurs se sont particulièrement reproduit dans les environnements
ou au fait que que les environnements ont été particulièrement beau ?

Sachant qu'il y a au moins une fleur à la génération n, dois-t-on l'attribuer au fait que les fleurs se sont particulièrement reproduit dans les environnements
ou au fait que que les environnements ont été particulièrement beau ?

- En environnement fortement ou moyennement sous-critique, la survie des fleurs est due à une exceptionnelle reproduction des fleurs (dans des environnements mauvais).

Sachant qu'il y a au moins une fleur à la génération n, dois-t-on l'attribuer au fait que les fleurs se sont particulièrement reproduit dans les environnements
ou au fait que que les environnements ont été particulièrement beau ?

- En environnement fortement ou moyennement sous-critique, la survie des fleurs est due à une exceptionnelle reproduction des fleurs (dans des environnements mauvais).
- En environnement faiblement sous-critique, la survie des fleurs est due à des environnements exceptionnellement bons, c.a.d surcritiques (avec une reproduction normale dans ces environnements).

Introduisons la probabilité de survie d'une fleur sous la suite d'environnements $(\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n)$:

$$p(\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) = \mathbb{P}_1(Z_n > 0 \mid \mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n).$$

THEOREM

Condionnellement à $Z_n > 0$,
Dans le cas fortement ou moyennnement sous-critique,

$$p(\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0, \qquad en\ \mathbb{P}.$$

Dans le cas faiblement sous-critique,

$$p(\mathcal{E}_1, ..., \mathcal{E}_n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} C > 0, \qquad en\ \mathbb{P}.$$

On note Υ_k la limite quasistationnaire de $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ partant de k fleurs :

$$\mathbb{P}(\Upsilon_k = l) := \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_k(Z_n = l \mid Z_n > 0) \qquad (l \geq 1).$$

On note Υ_k la limite quasistationnaire de $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ partant de k fleurs :

$$\mathbb{P}(\Upsilon_k = l) := \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_k(Z_n = l \mid Z_n > 0) \qquad (l \geq 1).$$

- Dans le cas fortement et moyennement sous-critique,

$$\Upsilon = \Upsilon_1 = ... = \Upsilon_k = ...$$

et la fonction génératrice G de Υ est l'unique solution de

$$\mathbb{E}(G(f_{\mathcal{E}}(s))) = \mathbb{E}(m(\mathcal{E}))G(s) + 1 - \mathbb{E}(f'(1)) \quad (s \geq 1), \quad G(0) = 0.$$

On note Υ_k la limite quasistationnaire de $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ partant de k fleurs :

$$\mathbb{P}(\Upsilon_k = l) := \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}_k(Z_n = l \mid Z_n > 0) \qquad (l \geq 1).$$

- Dans le cas fortement et moyennement sous-critique,

$$\Upsilon = \Upsilon_1 = ... = \Upsilon_k = ...$$

et la fonction génératrice G de Υ est l'unique solution de

$$\mathbb{E}(G(f_{\mathcal{E}}(s))) = \mathbb{E}(m(\mathcal{E}))G(s) + 1 - \mathbb{E}(f'(1)) \quad (s \geq 1), \quad G(0) = 0.$$

- Dans le cas faiblement sous-critique, pour tout $k \geq 1$, la fonction génératrice G_k de Υ_k satisfait

$$\mathbb{E}(G_k(f_{\mathcal{E}}(s))) = \gamma G_k(s) + 1 - \gamma \quad (s \geq 1), \qquad G_k(0) = 0.$$

De plus, $\forall k \geq 1, \quad \Upsilon_k \leq_{st} A$ a.s., avec $A < \infty$ a.s.

On regarde Z_n conditionnellement à la survie de la population dans le futur. Pour tous $l_1, l_2, ..., l_n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_k(Y_1 = l_1, ..., Y_n = l_n) = \lim_{p\to\infty} \mathbb{P}_k(Z_1 = l_1, ..., Z_n = l_n | Z_{n+p} > 0).$$

Q-PROCESSUS ASSOCIÉ À $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On regarde Z_n conditionnellement à la survie de la population dans le futur. Pour tous $l_1, l_2, ..., l_n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_k(Y_1 = l_1, ..., Y_n = l_n) = \lim_{p\to\infty} \mathbb{P}_k(Z_1 = l_1, ..., Z_n = l_n | Z_{n+p} > 0).$$

PROPOSITION

Dans le cas fortement sous-critique, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges en distribution vers la biaisé de la loi quasistationnaire :

$$\forall\ l \geq 0, \qquad \mathbb{P}_k(Y_n = l) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{l\mathbb{P}(\Upsilon = l)}{\mathbb{E}(\Upsilon)}.$$

Q-processus associé à $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$

On regarde Z_n conditionnellement à la survie de la population dans le futur. Pour tous $l_1, l_2, ..., l_n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}_k(Y_1 = l_1, ..., Y_n = l_n) = \lim_{p\to\infty} \mathbb{P}_k(Z_1 = l_1, ..., Z_n = l_n | Z_{n+p} > 0).$$

Proposition

Dans le cas fortement sous-critique, $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges en distribution vers la biaisé de la loi quasistationnaire :

$$\forall\ l \geq 0, \qquad \mathbb{P}_k(Y_n = l) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{l\mathbb{P}(\Upsilon = l)}{\mathbb{E}(\Upsilon)}.$$

Dans le cas moyennement ou faiblement sous-critique, $Y_n \to \infty$ en probabilité quand $n \to \infty$.