Master 1 MAS & CHPS – Probabilités, Modèles et Applications
Responsable : Adrien Hardy, email : `adrien.hardy@univ-lille.fr`

Feuille d'exercices 2
Rappels de théorie de la mesure

Exercice 8. Soit la mesure sur $\mathbb{R}$ définie par $\mu = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{[0,1]}\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\delta_0$. Montrer que c'est une mesure de probabilité et calculer $\int x\,\mathrm{d}\mu(x)$.

Exercice 9. Donner un exemple de mesure qui n'est pas σ-finie.

Exercice 10. On considère la mesure μ sur $(\mathbb{R}^2, \mathscr{B}(\mathbb{R}^2))$ définie par

$$\int f\,\mathrm{d}\mu = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

pour toute fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ mesurable. Est-ce que cette mesure est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 11. Soit $(E, \mathscr{T}, \mu)$ un espace mesuré et $f_n : E \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions mesurables. Sous quelles conditions a-t-on

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int f_n\,\mathrm{d}\mu = \int\sum_{n=1}^{\infty} f_n\,\mathrm{d}\mu \quad ?$$

Exercice 12. Démontrez le résultat suivant :

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un ouvert et $f : E \times I \to \mathbb{R}$ telle que

1. $x \mapsto f(x,t) \in L^1(\mu)$ pour tout $t \in I$,
2. $\partial_t f(x,t)$ existe pour tout $t \in I$ et μ-presque tout $x \in E$,
3. il existe $g \in L^1(\mu)$ tel que $|\partial_t f(x,t)| \leq g(x)$ pour tout $t \in I$.

Alors, pour tout $t \in I$,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int f(x,t)\,\mu(\mathrm{d}x) = \int \partial_t f(x,t)\,\mu(\mathrm{d}x).$$

Aide : On pourra utiliser l'identité (qu'on démontrera)

$$\frac{f(x,t+\varepsilon) - f(x,t)}{\varepsilon} = \int_0^1 \partial_t f(x, t+u\varepsilon)\,\mathrm{d}u.$$